Modular invariants and subfactors

河東泰之 (東大・数理)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

1999 年 11 月 11 日

1　概説

この内容は，J. Böckenhauer, D. E. Evans との共同研究，[4, 5, 6] に基づいている．

この研究の出発点は，Ocneanu [20] が Dynkin 図形に対して 1994 年に導入した chiral generator と，Longo-Rehren [13] が 1994 年に導入し，Xu [26, 27] が 1995 年から研究している braided endomorphism (のちに Böckenhauer-Evans [1, 2, 3] によって α-induction と名づけられた) がよく似た構造を持っていると言うことであった．我々は，両方の構成とも，より一般的な状況のもとで定義することができ，しかも本当に同じ物を与えていることを [4] で証明した．さらにこの同一視により，modular invariant について作用素環的に詳しく調べることが可能になり，さまざまな fusion rule algebra の構造が [4, 5] のようにわかるようになった．我々の一般的設定は次の通りである．

設定 1.1 $N \subset M$を index 有限の III 型 subfactor とする．Nの既約 endomorphism の有限個の system ${}_N X_N$があり，dual canonical endomorphism $\gamma|_N$は${}_N X_N$の元に分解すると仮定する．さらに，${}_N X_N$は braiding を持つと仮定し，inclusion map $\iota : N \hookrightarrow M$と${}_N X_N$から生じる既約 endomorphism の system 3 種類を，${}_N X_M$，${}_M X_N$，${}_M X_M$とする．(たとえば${}_N X_M$は，Mから Nへの既約 morphism の有限 system である．)

ここで，endomorphism の "system" とは，${}_N X_N$の元は互いに同値でないこと，$\lambda \in {}_N X_N$に対し，$\bar\lambda$と同値な元が${}_N X_N$内にあること，$\lambda, \mu \in {}_N X_N$に対し，合成$\lambda\mu$は${}_N X_N$内の元の直和に同値になること，id を含むことを意味する．

上の仮定により subfactor は自動的に finite depth になる．Ocneanu [20] の設定では，$N \subset M$は Goodman-de la Harpe-Jones subfactor [9, Sect. 4.5], Xu [26, 27] の設定では，$N \subset M$は conformal inclusion から Wassermann [25] の loop group construction によって生じる net of subfactors から得られる subfactor である．

2　α-induction と modular invariant

Ocneanu の double triangle algebra [20] はこの状況下で定義できる有限次元 C^*-環で，その minimal central projection と${}_M X_M$の元が 1 対 1 に対応する．さらに，double triangle algebra の center に別の積 ("vertical product") を入れることにより，M-M fusion rule algebra からの同型Φ が得られる．また，$\lambda \in {}_N X_N$に対し，Ocneanu の

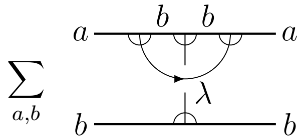

Figure 1. A chiral horizontal projector p_λ^+

chiral generator は，Fig. 1のように定義された double triangle algebra の center の元である．このとき，braiding を使っているので，その正負によって 2 種類の元 $p_\lambda^\pm$が得られる．

一方，Longo-Rehren [13] によって定義されたα-induction とは，$\lambda \in {}_N X_N$に対し

$$\alpha_\lambda^\pm = \gamma^{-1} \cdot \mathrm{Ad}(\varepsilon^\pm(\lambda, \gamma|_N)) \cdot \lambda \cdot \gamma$$

によって定まる Mの endomorphism である．ただし，$\varepsilon^\pm$は${}_N X_N$の (正・負の)braiding を表す．このα-induction は${}_N X_N$ の元の直和に対しても同じ式で定義され，そのとき，和，積，conjugate を保ち，これによって，N-N fusion rule algebra から M-M fusion rule algebra への 2 つの準同型が得られる．最初の定理 [4] は次のものである．

定理 2.1 上の設定の下で $p_\lambda^\pm = d_\lambda \Phi([\alpha_\lambda^\pm])$ が成り立つ．ただしここで，d_λはλの *statistical dimension,* $[\alpha_\lambda^\pm]$ は，$\alpha_\lambda^\pm$の定める M-M *fusion rule algebra* の元である．

また Rehren [23] の結果により，${}_N X_N$の braiding は，S行列，T行列と呼ばれる行列を定め，braiding が非退化のときはこれによって $SL(2, \mathbf{Z})$ の unitary 表現が定まる．また，fusion rule について，Verlinde 公式が成立する．これに対し我々は [4] で次の定理を証明した．

定理 2.2 上の設定の下で $Z_{la\mu} = \langle \alpha_\lambda^+, \alpha_\mu^- \rangle$ とおくと，次の条件が成立する．

1. $Z_{\lambda,\mu} \in \mathbf{N}$.
2. $Z_{00} = 1$.
3. $ZS = SZ, ZT = TZ$.

(Braiding が非退化のとき) 上の 3 条件を満たす行列 Zのことを modular invariant という．ただし，条件 2 での “0” とは identity morphism のことである．$SU(2)_k$に対応する modular invariant と chiral generator の関係については，別のタイプの結果が Ocneanu によって [20, 21] で得られている．我々の Z(の図形的表示) については，その後 Ocneanu も [21] で独立に我々と同じものに到達したようである．Conformal inclusion などから得られる subfactor の場合は，先に Zがわかっているので，そこからα-induction についての詳しい情報が得られる．

さて，$\alpha^{\pm}$の像 (の既約分解) によって得られる${}_M X_M$の subsystem を${}_M X_M^{\pm}$とおき，${}_M X_M^{+}$と${}_M X_M^{-}$ の共通部分を${}_M X_M^{0}$とおく．この共通部分を Ocneanu [20] の用語で ambichiral system という．さらに，${}_M X_M^{+}$と${}_M X_M^{-}$ の両者で生成される system については次の定理 [4] が成り立つ．これは本質的には Ocneanu [20] によるもので，彼の議論を一般的な状況に適用しただけで得られるものである．

定理 2.3 上の設定の下で，*braiding* が非退化ならば，${}_M X_M^{+}$と${}_M X_M^{-}$は${}_M X_M$全体を生成する．

$\tau \in {}_M X_M^0$, $\lambda \in {}_N X_N$に対し，[5] のように $b^{\pm}_{\tau,\lambda} = \langle \tau, \alpha^{\pm}_{\lambda} \rangle$ とおき，これを chiral branching coefficient と呼ぶ．Fusion rule に対し，次の定理が成り立つことが [5] で示された．Dynkin 図形の場合の (1) については，Ocneanu によってすでに見出されていたものである．

定理 2.4 上の設定の下で，*braiding* は非退化とする．

(1) ${}_M X_M$の自分自身への左掛け算による表現は，$\bigoplus_{\lambda,\mu \in {}_N X_N} Z_{\lambda,\mu} \pi_{\lambda,\mu}$と既約分解する．ただし，$\pi_{\lambda,\mu}$は図形的に定義された $Z_{\lambda,\mu}$次元の既約表現である．

(2) ${}_M X_M^{\pm}$の自分自身への左掛け算による表現は，$\bigoplus_{\tau \in {}_M X_M^0, \lambda \in {}_N X_N} b^{\pm}_{\tau,\lambda} \pi^{\pm}_{\tau,\lambda}$と既約分解する．ただし，$\pi^{\pm}_{\tau,\lambda}$は図形的に定義された $b^{\pm}_{\tau,\lambda}$次元の既約表現である．

(3) ${}_M X_M$の${}_M X_N$への左掛け算による表現は，$\bigoplus_{\lambda \in {}_N X_N} \pi_{\lambda,\lambda}$と既約分解する．

上の定理で表現空間の次元を数えることにより，直ちに次の系を得る．

系 2.5 上の定理と同じ仮定の下で，${}_M X_M$, ${}_M X_M^{\pm}$, ${}_M X_N$の元の数はそれぞれ，$\sum Z^2_{\lambda,\mu}$, $\sum (b^{\pm}_{\tau}, \lambda)^2$, $\sum Z_{\lambda,\lambda}$ で与えられる．

また fusion rule algebra の可換性については次の系を得る．

系 2.6 上の定理と同じ仮定の下で，${}_M X_M$, ${}_M X_M^{\pm}$から生じる *fusion rule algebra* が可換になるための必要十分条件はそれぞれ，$Z_{\lambda,\mu} \in \{0,1\}$, $b^{\pm}_{\tau,\lambda} \in \{0,1\}$ である．

この Corollary 2 つの，Dynkin 図形の場合の${}_M X_M$については，Ocneanu によって見出されていたものである．${}_M X_M^{\pm}$が非可換になる最初の例は Xu [26] によって発見されたが，上の系によればいつそのようなことが起こるか簡単に判定できることになる．(Conformal inclusion から生じる subfactor の場合，$b^{\pm}_{\tau,\lambda}$の値は最初からわかっている．)

3 Longo-Rehren subfactors

次に，α-induction から生じる Longo-Rehren subfactor についての結果を述べる．

Mの endomorphism の有限 system $\{\lambda_j\}_j$に対し，index 有限の subfactor $M \otimes M^{\mathrm{opp}} \subset R$で，dual canonical endomorphism が$\bigoplus_j \lambda_j \otimes \lambda_j^{\mathrm{opp}}$ で与えられるものが，Longo-Rehren [13] によって具体的に構成されている．これを，Longo-Rehren subfactor という．これは，Ocneanu の asymptotic inclusion [16, 17] と本質的に同じ構

成であることが増田 [14] によって示されており，もとの system $\{\lambda_j\}_j$から R-R morphism のなす system に移る操作が quantum double construction の類似であることが Ocneanu [19] によって指摘されている．(Quantum double とのさらに正確な関係は Müger [15] によって示されている．Popa [22] の symmetric enveloping algebra も finite depth のときは同じ物を与える．)

上の状況下で，${}_M X_M^0$，${}_M X_M$，${}_M X_M^{\pm}$から生じる Longo-Rehren subfactor について，R-R morphism のなす tensor category について考えたい．以下，もとの${}_N X_N$の braiding は非退化とする．

まず，${}_M X_M^0$の場合は簡単である．この上には非退化な braiding があることが我々によってすでに示されているので，Ocneanu の一般論 [18] によって，R-R morphism のなす category は，${}_M X_M^0 \times ({}_M X_M^0)^{\mathrm{opp}}$に同型である．(非退化な braiding がある場合の asymptotic inclusion/Longo-Rehren subfactor の一般論については，[7, 10] に書いてある．この場合は "quantum double" と言っても単なる double で 2 重に水増ししただけのものである．)

次に，${}_M X_M$について考える．このためには，Longo-Rehren subfactor の一般論に関して，泉による half-braiding の概念 [10] が重要である．一般に，λ_jたちの有限直和σに対し，unitary の族 $\mathcal{E}_\sigma(\lambda_j) \in (\sigma\lambda_j, \lambda_j\sigma)$ が通常の braiding-fusion equation の「半分」にあたる条件を満たすとき，$\mathcal{E}_\sigma(\lambda_j)$ をσの half-braiding という．泉の結果 [10] によれば，$\sigma \otimes \mathrm{id}$ が，$M \otimes M^{\mathrm{opp}}$ から Rの endomorphism に延長できるための条件が，σが half-braiding を持つことで，この延長は half-braiding に依存するが，延長が unitary 同値であることと half-braiding が自然な意味で同値であることが同値な条件である．この延長を$\widetilde{\sigma^{\mathcal{E}}}$あるいは単に$\tilde{\sigma}$と書く．

さて一方，Böckenhauer-Evans の一般論 [3] によれば，もとのε^+ から，α_λ^+と${}_M X_M$の元との間に relative braiding が生ずる．これが，α_λ^+の half-braiding になっていることが簡単にわかるので，$\tilde{\alpha}_\lambda^+ \in \mathrm{End}(R)$ が生じる．泉による，延長σの既約性判定条件 [10] を用いると，これは既約であることが示せる．(ポイントは，既約なλから出発しても一般にα_λ^+は既約ではないが，$\tilde{\alpha}_\lambda^+$ まで行くと常に既約になる，ということである．) さらに同様に$\tilde{\alpha}_\mu^- \in \mathrm{End}(R)$ も作れて既約になるが，$\tilde{\alpha}_\lambda^+\tilde{\alpha}_\mu^-$と積を取ってもなお既約であることが示せる．これらは互いに相異なり，R-R morphism の system 全体をなし，したがって R-R morphism の system は，${}_N X_N \times ({}_N X_N)^{\mathrm{opp}}$に同型であることが [6] のようにわかる．実は，この結果自体は「同値な system は同じ quantum double を持つ」という Ocneanu の一般的な定理 [19] を使えばすぐにわかるのだが，ここではより具体的な構成を行っているのでもっと詳しい情報が得られる．たとえば，$M \otimes M^{\mathrm{opp}} \subset R$の canonical endomorphism は，$\bigoplus_{\lambda,\mu \in {}_N X_N} Z_{\lambda\mu}\tilde{\alpha}_\lambda^+\tilde{\alpha}_\mu^-$ であることがわかる．このような morphism が canonical endomorphism として実現できるというのが 1999 年の夏に Rehren が講演していたこと [24] だが，我々の方法だと単に普通の Longo-Rehren subfactor を使って dual に移るだけで，簡単な別証明が得られていることになる．

さらに次に，${}_M X_M^{\pm}$について考えよう．$\pm$はどちらでも同様なので，ここでは$+$の方だけを考える．α_λ^+がε^+から生じる half-braiding を持ち，それによって既約な$\tilde{\alpha}_\lambda^+$が生じるところまでは前と同じであるが，今度は$\tilde{\alpha}_\mu^-$を考えることができない．(α_μ^-は一般に${}_M X_M^+$の元の直和ではないから．) しかし，${}_M X_M^0$ の元に限れば一方では${}_M X_M^+$の

元であり，また一方ではα_μ^-の持つε^-から生じる half-braiding を引き継いでいるので$\tilde{\tau}^-$を考えることができる．(ε^-から生じる half-braiding を使っていることを示すため，右肩に$-$をつけた．) これは，τが既約なため自動的に既約である．さらに実は，$\tilde{\alpha}_\lambda^+\tilde{\tau}^-$も既約であり，これらは互いに相異なり R-R morphism の system 全体をなし，したがって R-R morphism の system は，${}_N X_N \times ({}_M X_M^0)^{\mathrm{opp}}$に同型であることが [6] のようにわかる．たとえば，E_6(の 6 つの頂点すべてを使った system) の "quantum double" は $A_{11} \times A_3$, E_8(の 8 つの頂点すべてを使った system) の "quantum double" は $A_{29} \times A_4^{\mathrm{even}}$, D_{2n}(の $2n$ 個の頂点すべてを使った system) の "quantum double" は $A_{4n-3} \times D_{2n}^{\mathrm{even}}$である．これらは 1998 年 12 月に Ocneanu [21] によって主張されたものである．

しかし，この E_6, E_8の例について見てみると，6, 8 個の頂点を同等に扱っているので，この "quantum double" は，E_6, E_8を principal graph に持つ (hyperfinite II_1) subfactor の asymptotic inclusion の M_∞-M_∞ bimodule のなす system とは違うものであることがわかる．そこで，この asymptotic inclusion の M_∞-M_∞ bimodule のなす system を求めるにはどうすればいいか考えてみよう．

まず，E_6について考えてみる．$\tilde{\alpha}_\lambda^+\tilde{\tau}^-$について，Dynkin 図形 A_{11}, A_3 を用いて $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 10$, $\tau = 0, 1, 2$ となるように番号を振る．すると，$\lambda + \tau$が偶数になるペア (λ, τ) だけが今現れることがわかる．さらに，λ, τがともに偶数のときは (λ, τ) と $(10 - \lambda, 2 - \tau)$ が同値な既約 endomorphism を与えること，λ, τがともに奇数のときは $(1, 1)$ と $(9, 1)$ が，また $(3, 1)$ と $(7, 1)$ が同値な既約 endomorphism を与えること，$(5, 1)$ は既約ではなく 2 つの既約 endomorphism に分解することがわかる．これは order 2 の "orbifold" [7] であり，これによって 10 個の既約 endomorphism が得られ，これらが R-R morphism の system 全体，つまり M_∞-M_∞ bimodule 全体のなす system を与えることが [6] のようにわかる．Asymptotic inclusion の dual principal graph もこれから簡単に求めることができる．これは最初，泉 [11] によって tube algbera を直接計算することによって得られたものである．

E_8についても同様の計算をすることができ，やはり order 2 の "orbifold" によって 18 個の既約 endomorphism からなる R-R morphism の system が得られることが [6] のようにわかる．

さらに，$SU(3)$ に対しては 3 つの conformal inclusion $SU(3)_5 \subset SU(6)_1$, $SU(3)_9 \subset (E_6)_1$, $SU(3)_{21} \subset (E_7)_1$からそれぞれ $\mathcal{E}_8$, $\mathcal{E}_{12}$, $\mathcal{E}_{24}$と呼ばれるグラフが生じ，これらが Dynkin 図形 E_6, E_8 の類似であることが知られている．($\mathcal{E}_8$を Figure 1 にかかげた．) 3 つのグラフ，$\mathcal{E}_8$, $\mathcal{E}_{12}$, $\mathcal{E}_{24}$は頂点に $0, 1, 2$ の "coloring" があり，color 0 の頂点だけからなる system に対し，Longo-Rehren subfactor を作ることができる．これが上の E_6, E_8を principal graph に持つ (hyperfinite II_1) subfactor の asymptotic inclusion の $SU(3)$ における類似物である．これらに対しても同様の計算ができ，それぞれ 14, 27, 62 個の既約 endomorphism からなる R-R morphism の system が得られることが [6] のようにわかる．このうち最初のものについては orbifold ではなく，あとの 2 つについては order 3 の "orbifold" になっていることがわかる．

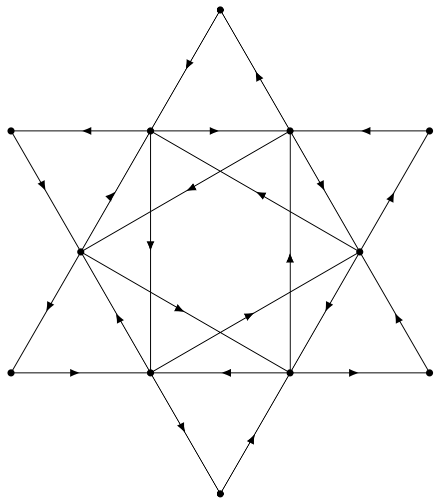

Figure 2. $\mathcal{E}_8$; $SU(3)_5 \subset SU(6)_1$

References

[1] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors. I, Commun. Math. Phys. **197** (1998) 361–386

[2] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors. II, Commun. Math. Phys. **200** (1999) 57–103

[3] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors. III, Commun. Math. Phys. **205** (1999) 183–228

[4] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, On α-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors, preprint, math.OA/9904109

[5] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, Chiral structure of modular invariants for subfactors, preprint, math.OA/9907149

[6] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, in preparation.

[7] D. E. Evans, Y. Kawahigashi, Orbifold subfactors from Hecke algebras II — Quantum doubles and braiding—, Commun. Math. Phys. **196** (1998) 331–361

[8] D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Quantum symmetries on operator algebras*, Oxford: Oxford University Press, 1998

[9] F. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, MSRI publications 14, Berlin: Springer, 1989

[10] M. Izumi, The structure of sectors associated with the Longo-Rehren inclusions I. General theory, preprint 1999

[11] M. Izumi, The structure of sectors associated with the Longo-Rehren inclusions II, in preparation

[12] Y. Kawahigashi, R. Longo, R., M. Müger, Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory, preprint, math.OA/9903104

[13] R. Longo, K.-H. Rehren, Nets of subfactors, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 567–597

[14] T. Masuda, An analogue of Longo's canonical endomorphism for bimodule theory and its application to asymptotic inclusions, Internat. J. Math. **8** (1997) 249–265

[15] M. Müger, Quantum doubles of C^*-categories, modular categories and asymptotic subfactor, in preparation

[16] A. Ocneanu, Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras, in D. E. Evans and M. Takesaki (eds.) *Operator algebras and applications, Vol. 2*, Warwick 1987, London Mathematical Society Lecture Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, 1988, pp. 119–172

[17] A. Ocneanu, *Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors*, Univ. of Tokyo Seminary Notes 45, 1991 (Notes recorded by Y. Kawahigashi)

[18] A. Ocneanu, An invariant coupling between 3-manifolds and subfactors, with connections to topological and conformal quantum field theory. Preprint 1991

[19] A. Ocneanu, Seminar talk at University of California, Berkeley. June 1993

[20] A. Ocneanu, Paths on Coxeter diagrams: From Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors (Notes recorded by S. Goto), in preparation

[21] A. Ocneanu, Operator algebras, topology and subgroups of quantum symmetry — construction of subgroups of quantum groups — (Notes recorded by S. Goto and N. Sato), to appear in the Proceedings of the Taniguchi Conference, Nara, 1998

[22] S. Popa, Symmetric enveloping algebras, amenability and AFD properties for subfactors, Math. Res. Lett. **1** (1994) 409–425

[23] K.-H. Rehren, Braid group statistics and their superselection rules. In: *The algebraic theory of superselection sectors*, Palermo 1989, (ed. D. Kastler), Singapore: World Scientific 1990, pp. 333–355

[24] K.-H. Rehren, in preparation

[25] A. Wassermann, Operator algebras and conformal field theory III: Fusion of positive energy representations of $SU(N)$ using bounded operators, Invent. Math. **133** (1998) 467–538

[26] F. Xu, New braided endomorphisms from conformal inclusions, Commun. Math. Phys. **192** (1998) 347–403

[27] F. Xu, Applications of braided endomorphisms from conformal inclusions, Internat. Math. Research Notices, (1998) 5–23, see also the erratum to Theorem 3.4 (1) on page 437 of the same volume