緒方芳子氏の業績

河　東　泰　之

1　はじめに

緒方芳子氏が「量子スピン系の研究」で 2022 年度日本数学会賞秋季賞を受賞された．2021 年の International Association of Mathematical Physics からの Henri Poincaré Prize 受賞，2022 年の国際数学者会議招待講演 (Mathematical Physics のセクション) に続く栄誉で大変おめでたいことである．数学会賞は，彌永賞の時代に坂本礼子氏が受賞した例があるが，現在の春季賞，秋季賞の体制になった 1987 年以降では女性数学者の受賞は初めてであり，また国際数学者会議での日本人女性の招待講演も緒方氏が史上初めてである．緒方氏が東大物理の博士課程 1 年生だったときから知っている者として，また現在の東大数理での同僚として，非常に喜ばしい．

緒方氏は院生時代から一貫して量子統計力学の数学的側面を，主に作用素環論の手法を用いて研究している．これは日本では荒木不二洋氏が主導していた分野であり，基本的な教科書は [4], [5] である．有限系の量子力学は行列環 $M_d(\mathbb{C})$ で記述されるが，無限系の場合の研究に適した数学的道具として使われるのが作用素環論である．物理的な議論ではしばしば，有限系を考えた後，適当な意味で系のサイズを無限に大きくする極限を取るという論法が使われるが，これを数学的に厳密かつ使いやすい形で実現することは容易ではない．作用素環論はそのための便利で適切な枠組みを与えるのである．

緒方氏の Henri Poincaré Prize の受賞対象は，Onsager の相反定理から始まって無限量子スピン系の行列積状態，SPT phase についての画期的な業績となっている．この通り，初期の成果からが評価されており，少し前の結果にも [11], [20] など有名なものがいくつもあるのだが，また中でも特に [21] は von Neumann の古い問題を適切な設定下で肯定的に解決した優れた結果であるのだが，秋季賞の方は最近 5 年程度の業績が対象ということなので，ここでは最近緒方氏が力を入れて研究している topological phase の分類問題について述べる．YouTube でビデオが公開されている国際数学者会議での招待講演もこれに関するものである．なお緒方氏は学部から博士課程まで物理学科の出身だが，ごく初期のものを除く論文はすべて，定義，定理，証明というスタイルの厳密な数学である．物理学科出身で数学的な数理物理学を研究している人や，現在は数学科に所属している人はかなりいるが，緒方氏は物理的な洞察力，長く複雑なノルム評価などの数学的技術力の双方において，最高レベルの実力を備えた，まれな存在である．

本題の topological phase は，2016 年のノーベル物理学賞を受賞した物理学のホットな話題であるが，数学的にも多くの興味深い問題を含んでいる．基本的な問題設定について，まず数学的に，しかしおおざっぱに説明しよう．$\mathbb{Z}^\nu$ の各点上に複素成分の行列環 $M_d(\mathbb{C})$ を考え，これらすべての無限テンソル積を考える．d は 2 以上の固定された自然数である．これがすべての枠組みとなる作用素環 (C^* 環) である．ただし作用素の環とは言っても，この環の元たちが自然に作用する Hilbert 空間は存在しない．いろいろな Hilbert 空間とその上へのこの環の作用を導入して考えられることがこの

設定のメリットである．この作用素環の中で gapped Hamiltonian というものを考えるのだが，まず多くの人に使われている定義の概要を述べる．Hamiltonian とは抽象的には単にこの作用素環の中の自己共役作用素である．しかし，1 個の自己共役作用素だけを考えるのでは今考えたい物理的状況を記述することができない．$M_d(\mathbb{C})$ の有限個のテンソル積を作り，その個数を増やしていくときの有限次元 C^* 環の増大列を考える．さらにそのそれぞれの中の自己共役作用素からなる列を考える．これらの各自己共役作用素は普通の自己共役行列なので，当然それぞれの最低固有値と，その次に小さい固有値の間にはギャップがある．有限次元 C^* 環の増大列の中の自己共役作用素の列について，このギャップが一定値以上を保っているというのが gapped Hamiltonian の gapped の意味である．緒方氏は実際にはこれとは少し違って，最初から $M_d(\mathbb{C})$ の無限テンソル積を使う定義を採用している．このような gapped Hamiltonian について，連続変形で移り合えるという同値関係の同値類が topological phase である．その中に，あとできちんと説明するように自明なもの，trivial phase というものがある．その中でさらに細かい分類を考える．有限群 G が各 $M_d(\mathbb{C})$ 内にユニタリ表現を持つとき，共役作用によって各 Hamiltonian に G が作用するので，この作用で不変な Hamiltonian を考えることができ，さらに連続変形も G の作用で不変なまま行うことにする．Trivial phase の中で，このような連続変形で移り合えるという同値関係の同値類を SPT phase (symmetry protected topological phase) という．このような topological phase，SPT phase の分類について自然な不変量を見出すことが緒方氏の研究の主眼である．緒方氏はこの問題や関連する問題について，短い間に長い論文を [2], [3], [17], [18], [32], [33], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31] と大量に書いている．今回はこの中で特に有名な結果についてふれる．このうち [31] は国際数学者会議の proceedings のための本人によるレビュー論文である．

なおこの種の，物理学に起源をもつ問題を数学的に研究する際には多くの技術的困難が発生する．この例でいえば，gapped Hamiltonian を数学的にきちんと定義すること，その連続変形の適切な定義を与えること，不変量の数学的な定義を与えること，それが本当に不変量であることを厳密に証明することが問題になる．たとえば最初の問題は，素朴な形で Hamiltonian を書くと収束しない無限和になってしまうということが問題である．このうち gapped Hamiltonian とその連続変形の数学的な定義についてはすでに Hastings によって与えられていたが，作用素環論の枠組みの中できちんと不変量を定義して，それが本当に不変量であることを示したしたのが緒方氏の業績である．

2 数学的設定

上に書いた設定の数学的に正確なものを述べる．まず格子の次元 ν を固定し，$\mathbb{Z}^\nu$ を考える．$\mathbb{Z}^\nu$ の各点に同じ行列環 $M_d(\mathbb{C})$ $(d \geq 2)$ が対応しており，その無限テンソル積を $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ とおく．より正確には，$\mathbb{Z}^\nu$ の有限集合 Λ についてその上の $M_d(\mathbb{C})$ のテンソル積を $\mathcal{A}_\Lambda$ と書くと，$\Lambda \subset \Lambda'$ のとき $\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$, $x_\lambda \in M_d(\mathbb{C})$ を $\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \otimes \bigotimes_{\lambda\in\Lambda'\setminus\Lambda} I$ とみなすことにより，$\mathcal{A}_\Lambda \subset \mathcal{A}_{\Lambda'}$ と思える．(ここで I は $M_d(\mathbb{C})$ の単位行列である．) この同一視の下で $\bigcup_\Lambda \mathcal{A}_\Lambda$ を作ってさらに完備化したものが無限テンソル積 $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ である．作用素環論では UHF C^* 環と呼ばれるものの一つである．(UHF とは Uniformly Hyperfinite の省略形である．) ある Hilbert 空間の上の作用素のなす環で，$*$ 演算とノルム位相で閉じているものが C^* 環，さらに作用素の強位相で閉じているものが von Neumann 環である．(作用素の弱位相で閉じている，と言っても同じものになる．) $x \in M_d(\mathbb{C})$, $x \neq I$ のとき

$\bigotimes_\lambda x$ のような形の元は $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ には入っていないことに注意する．この設定を量子スピン系と呼ぶ．$\nu = 1$ の時は格子点が一列に並んでいるので特に量子スピン鎖という．

$\mathbb{Z}^\nu$ の各有限部分集合 X に $\mathcal{A}_X$ の自己共役な元を対応させる写像 Φ を interaction と呼ぶ．ある自然数 m が存在して，X の直径が m より大きいときに $\Phi(X) = 0$ となるとき，Φ は finite range を持つという．また $\sup_X \|\Phi(X)\|$ が有限であるとき，Φ は uniformly bounded であるという．Interaction Φ が与えられたとき，$\mathbb{Z}^\nu$ の有限部分集合 Λ に対して $(H_\Phi)_\Lambda = \sum_{X\subset\Lambda} \Phi(X)$ とおき，local Hamiltonian という．[5] にあるように，uniformly bounded かつ finite range を持つ interaction Φ について，$t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ に対して

$$\tau_t^\Phi(A) = \lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^\nu} \exp(it(H_\Phi)_\Lambda)A\exp(-it(H_\Phi)_\Lambda)$$

が意味を持つことが分かっている．これによって強連続な one-parameter automorphism group τ^Φ が $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ 上に定まる．

次に gapped Hamiltonian の “gapped” という性質をこの one-parameter automorphism group τ^Φ を用いて定義する．本来は local Hamiltonian を $\mathbb{Z}^\nu$ 全体で考えたいところだがそれは今考えている作用素環 $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ の中で収束しない．その代わりに one-parameter automorphism group τ^Φ を考えると話がすっきりするのである．

C^* 環 $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ 上の線型汎関数 ω が state であるとは，任意の $A \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ に対して $\omega(A^*A) \geq 0$, $\omega(I) = 1$ を満たすことと定義する．これは量子力学における状態概念を一般化したことから来る名前である．ある state が異なる state 2 つの凸結合で書き表せない時，pure であるという．State ω が one-parameter automorphism group τ^Φ の ground state であるとは，任意の $A \in D(\delta^\Phi)$ に対して $-i\omega(A^*\delta^\Phi(A)) \geq 0$ を満たすことである．ただしここで，δ^Φ は

$$\delta^\Phi(A) = \frac{d}{dt}\tau_t^\Phi(A)\Big|_{t=0}$$

で定まる τ^Φ の generator であり，$D(\delta^\Phi)$ はその定義域である．さらに τ^Φ の ground state ω が一意的であるとする．（このとき ω は pure となる．）ある $\gamma > 0$ が存在して，$A \in D(\delta^\Phi)$, $\omega(A) = 0$ となる任意の A に対して

$$-i\omega(A^*\delta^\Phi(A)) \geq \gamma\omega(A^*A)$$

を満たすとき，τ^Φ は unique gapped ground state を持つという．この定義を見ても何が gapped なのか分かりにくいであろうが，C^* 環が $M_d(\mathbb{C})$ の時に考えてみれば，これが Hamiltonian のスペクトルの gap の話であることが分かるのである．

Uniformly bounded かつ finite range を持つ interaction Φ であって，τ^Φ が unique gapped ground state を持つようなものを考える．このような Φ の全体を $\mathcal{P}$ を書く．これが分類すべき数学的対象である．これは，純粋数学としての作用素環論を考えていたのではちょっと思いつかないような設定であり，その意味で物理学に起源を持つ問題だが，定義は数学的に厳密になされており，この後の分類も数学的に厳密な定理として得られるものである．

一番簡単な場合としては次のものがある．X の直径が 1 より大きいときに $\Phi(X) = 0$ となるとし

ように．このときは τ_t^Φ は $\bigotimes_{x\in\mathbb{Z}^\nu}\mathrm{Ad}(U_t^{(x)})$ という無限テンソル積の形になる．ここで $U_t^{(x)}$ は格子点 x に載っている $M_d(\mathbb{C})$ 内の one-parameter unitary group である．なお一般に，$\bigotimes_{x\in\mathbb{Z}^\nu}U_t^{(x)}$ の形の元は $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ に入っていないが，$\bigotimes_{x\in\mathbb{Z}^\nu}\mathrm{Ad}(U_t^{(x)})$ には $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ 上の one-parameter automorphism group として意味があることに注意する．このような Φ は on-site interaction と呼ばれ，自明なものとみなされる．この例では $X, Y\subset\mathbb{Z}^\nu$, $A\cap B=\varnothing$ のとき，$A\in\mathcal{A}_X$, $B\in\mathcal{A}_Y$, $t\in\mathbb{R}$ であれば，$\tau_t^\Phi(A)\in\mathcal{A}_X$ なので，$[\tau_t^\Phi(A), B]=0$ となっている．一般の場合も，$[\tau_t^\Phi(A), B]$ が「小さい」ことを示すノルムの不等式があり，Lieb-Robinson bound と呼ばれる．これは様々な性質の証明に用いられる重要なものである．

さて元の話に戻って $\mathcal{P}$ の元を分類する同値関係が必要になる．$\mathcal{P}$ 内で $\Phi_0\sim\Phi_1$ とは，gap を一定以上に保ったまま $\mathcal{P}$ の中の C^1 級の path でつなげるということである．これは phase transition を起こさないまま連続的に変形できるということで，正確な定義は [28, Definition 1.2], [31, Section 5] にある．$\mathcal{P}$ のこの同値関係による同値類を topological phase という．On-site interaction が unique ground state を持つとき trival interaction という．Trivial interaction 同士は同値なので，これらを含む同値類を trival phase という．これらはまた，short range entanglement を持つとも言われる．$\mathcal{P}$ の trivial interaction 全体を $\mathcal{P}_0$ と書く．

Φ_t, $t\in[0,1]$ を interaction の連続な族とする．$\mathbb{Z}^\nu$ の有限集合 Λ について，

$$\frac{d}{dt}\alpha_{\Phi,t,\Lambda}(A)=i[(H_{\Phi_t})_\Lambda, \alpha_{\Phi,t,\Lambda}(A)],\quad \alpha_{\Phi,0,\Lambda}(A)=A$$

の解 $\alpha_{\Phi,t,\Lambda}(A)$ が存在する．さらに適切な仮定の下で，

$$\alpha_{\Phi,t}(A)=\lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^\nu}\alpha_{\Phi,t,\Lambda}(A),\quad A\in\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$$

が存在する．$\alpha_{\Phi,t}$ の形の自己同型で生成される $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ の自己同型の部分群を $\mathrm{QAut}(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu})$ とおく．$\Phi_0\sim\Phi_1$ のとき，τ^{Φ_0} の ground state 全体は $\alpha\in\mathrm{QAut}(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu})$ によって τ^{Φ_1} の ground state 全体に移ることが [1], [10], [17], [19] で示されている．

さらに，SPT phase の分類ではこの同値関係をさらに細分した，有限群作用での不変性を保った分類を考える．G を有限群，U をその d 次元ユニタリ表現とする．$\beta_g=\bigotimes_{\mathbb{Z}^\nu}\mathrm{Ad}(U_g)$ により，G の $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^\nu}$ への作用が定まる．これを on-site symmetry と呼ぶ．すべての有限集合 $X\subset\mathbb{Z}^\nu$ と $g\in G$ に対して $\beta_g(\Phi(X))=\Phi(X)$ となるとき，Φ は β 不変であるという．$\mathcal{P}$ の元のうち，β 不変であるもの全体を $\mathcal{P}_\beta$ と書く．さらに，Φ_0, Φ_1 が $\mathcal{P}_\beta$ 内で gap を一定以上に保ったまま C^1 級の path でつなげるとき，Φ_0 と Φ_1 は β 同値であると言い，$\Phi_0\sim_\beta\Phi_1$ と書く．$\mathcal{P}_\beta$ をこの同値関係で分類することが目標である．中でも $\mathcal{P}_0\cap\mathcal{P}_\beta$ を $\mathcal{P}_{\beta,0}$ と書いて，この集合内の $\sim_\beta$ による同値類を SPT phase という．この概念は物理で [9] によって導入されたものである．

3 SPT phase の cohomology 的不変量 — $\nu=1$ の場合 —

さて SPT phase を分類するための自然な不変量を求めることが目標である．Matrix product state, projected entangled-pair state, topological quantum field theory らを用いた物理的議論に基づいて，[6], [16], [34], [35] は，群 cohomology $H^{\nu+1}(G, U(1))$ に値を持つある種の指数が自然な不変

量になるということを予想した．これを $\nu=1$ の場合に解決したのが緒方氏の [25] である．$\nu=1$ の場合は不変量の入る cohomology 群は $H^2(G,U(1))$ である．この cohomology 群の元が G の射影的ユニタリ表現から生じることはよく知られている．そこで，$\mathcal{P}_\beta$ の元から射影的ユニタリ表現を作ることが目標である．

Interaction $\Phi\in\mathcal{P}_\beta$ を取る．まず，物理的な考察から，系を半分に切ったところで考えるとよいということが知られている．そこで $\mathcal{A}_L=\bigotimes_{x<0}M_d(\mathbb{C})$, $\mathcal{A}_R=\bigotimes_{x\geq 0}M_d(\mathbb{C})$ とおいて，$\mathcal{A}_\mathbb{Z}$ を $\mathcal{A}=\mathcal{A}_L\otimes\mathcal{A}_R$ と表示する．α^Φ の unique gapped ground state は split property と呼ばれる性質を満たすことが [15] によって知られている．この意味は，巨視的には unique gapped ground state が，$\mathcal{A}_\mathbb{Z}$ の上の分解表示について左右のテンソル積に分解するということである．この unique gapped ground state から生じる $\mathcal{A}$ の表現を用いると，$\mathcal{A}_R$ の既約表現 π_R があり，G の $\pi_R(\mathcal{A}_R)$ への作用が生じることがわかる．このような作用は G のある射影的ユニタリ表現 u^R を用いて，$\mathrm{Ad}(U^R_g)(\pi_R(A))=\pi_R(\beta^R_g(A))$, $A\in\mathcal{A}_R$ の形に表される．ここで β^R_g は β_g を $\mathcal{A}_R$ に制限したものである．これによって $H^2(G,U(1))$ の元が現れ，cohomology 群の元が well-defined であることが示される．ここまではすでに知られていたことからそれほど離れているわけではないが，これが $\sim_\beta$ についての不変量となっていることを示したのが，緒方氏の大きな貢献である．この結果は，$\mathbb{Z}_2$-grading を持つ Fermion 系にも [3] で拡張されている．

また，[14] に始まる Lieb-Schultz-Mattis 型定理というものがあり，元々は Heisenberg 模型の特殊性を用いて unique gapped ground state の非存在を示すものであるが，上記の結果の応用として，全く別の議論でこの型の定理を一般的な場合に証明したものが [32], [33] で得られている．

4　SPT phase の cohomology 的不変量 — $\nu=2$ の場合 —

前セクションで述べた物理学者たちの群 cohomology に値を持つ不変量の予想を $\nu=2$ の場合に解決したのが緒方氏の [28] である．この場合不変量は群 cohomology $H^3(G,U(1))$ に値を持つというのが予想である．一方作用素環論においては $H^3(G,U(1))$ は cocycle action と呼ばれるものから生じることがよく知られている．これは次のように現れる．中心が $\mathbb{C}$ だけからなる作用素環 M を考え，群 G から $\mathrm{Aut}(M)$ への写像 α を考える．$g,h\in G$ について $\alpha_g\alpha_h$ と α_{gh} の違いは内部自己同型 $\mathrm{Ad}(U_{g,h})$ ($U_{g,h}$ は M のユニタリ作用素) であるとしよう．このとき α を cocycle action という．この状況の下で，ユニタリ作用素 $V_g\in M$ をうまく取って $\tilde{\alpha}_g=\mathrm{Ad}(V_g)\alpha_g$ が $\tilde{\alpha}_g\tilde{\alpha}_h=\tilde{\alpha}_{gh}$ を満たすようにできるか，という問題を考える．これは常にできるわけではなく，その障害として現れるのが $H^3(G,U(1))$ の元なのである．作用素環論では，この概念は $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のときに，Connes による自己同型の分類理論で初めて現れたものである．

さて本題のため，interaction $\Phi\in\mathcal{P}_\beta$ を取り，自明な interaction $\Phi_0\in\mathcal{P}_\beta$ について $\Phi\sim_\beta\Phi_0$ であるとする．今度もシステムを半分に切るという操作で，平面を左右，および上下に分ける．すなわち，

$$H_L=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\mid x<0\},$$
$$H_R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\mid x\geq 0\},$$
$$H_U=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\mid y\geq 0\},$$

$$H_D = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y < 0\},$$

とおいて $\mathcal{A}_{H_L}$ などを考える．また，ある種の自己同型の state への効果が x 軸付近に局在しているという性質を調べるため，$0 < \theta < \pi/2$ に対して

$$C_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |y| \le |x| \tan\theta\}$$

とおいて，$C_{\theta,L} = C_\theta \cap H_L$, $C_{\theta,R} = C_\theta \cap H_R$ に対して $\mathcal{A}_{C_{\theta,L}}$, $\mathcal{A}_{C_{\theta,R}}$ を考える．

Φ の ground state への β_g の作用を見ることにより，$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_{C_{\theta,L}})$, $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_{C_{\theta,R}})$ の元が生じる．これらと，前々セクションの考察から得られる $\alpha \in \mathrm{QAut}(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^2})$ の性質と合わせて，$\mathcal{A}_R$ の表現内にユニタリ作用素 $u(g, h)$ が取れる．γ_L についても同様の考察を行い，さらに $\mathcal{A}_L$, $\mathcal{A}_R$ 上の pure state ω_L, ω_R を用いて，$\omega_L \otimes \omega_R$ への自己同型の作用を見ることによって，$\mathcal{A}$ の表現内にユニタリ作用素 W_g が取れる．$u(g, h)$ と W_g を組み合わせることにより，3-cocycle $c(g, h, k) \in U(1)$ が生じるのである．途中でさまざまな自己同型を選ぶときの自由度があるが，cocycle action のときと同様に，$c(g, h, k)$ の cohomology 類が well-defined であることが示され，さらに $\sim_\beta$ についての不変量となることも示されるのである．こちらの結果も，$\mathbb{Z}_2$-grading を持つ Fermion 系にも [30] で拡張されている．

一般の ν に対する予想は未解決であるが，最近では上で書いた元の予想の形では正しくないだろうと考えられており，新しい予想が [12], [36] で提案されている．それによると，SPT phase は invertible quantum field theory の言葉で理解されるべきであり，自然な不変量は G の分類空間 BG の bordism group の Pontryagin dual に値を持つとされる．$\nu = 1, 2$ の場合は，この群は $H^2(G, U(1))$, $H^3(G, U(1))$ に一致することが知られている．

5　Topological phase の不変量としてのテンソル圏— $\nu = 2$ の場合 —

$\nu = 1$ の時は，$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ と期待されている．これについては [22], [23], [24] で，gapped ground state の genertic な場合と理解できる matrix product state について，予想 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ の肯定的な結果が得られている．一方 $\nu = 2$ の場合については，緒方氏は [13] に関連して，[29] で代数的場の量子論における superselection sector が topological phase の不変量を与えることを見抜き，量子スピン系の gapped ground state に応用するための数学的困難を解決して，superselection sector が braided tensor category となることを証明した．

Superselection sector とは量子力学の数学的記述に現れる概念で，ある種の作用素環の,「たちのよい」表現のユニタリ同値類のことである．特に [7], [8] など，代数的場の量子論 (場の量子論を作用素環論を用いて記述する研究) において大きな成功を収めた．そこでは Minkowski 空間の上の場の量子論について，作用素環の族の表現のテンソル積の概念が非自明な形で定義され，Minkowski 空間の次元が 3 以上のときはテンソル積演算が自明な形で可換であることが示されている．一方 2 次元ではテンソル積演算が非自明な形で可換になることが示されており，表現たちは braided tensor category というものをなす．Category の object と morphism は，表現と intertwiner である．(群のユニタリ表現においては $\pi \otimes \sigma$ と $\sigma \otimes \pi$ は自明にユニタリ同値であり，3 次元以上の Minkowski 空間の上の場の量子論ではこれに当たることが起きている．一方量子群の表現論では $\pi \otimes \sigma$ と $\sigma \otimes \pi$ が非

自明な形でユニタリ同値になることが起こり，このユニタリ同値を与えるユニタリ作用素が braiding である．2 次元の場合についてはこちらに当たることが起きている．）Braided tensor category は，knot や link の不変量を与え，Jones 多項式と関係している．

ある種の粒子の振る舞いは対称性を表す群のユニタリ表現によって記述されることが知られており，ユニタリ表現たちは自明な braiding を持つ braided tensor category を与える．そこで superselection sector もある種の粒子状のもの (quasi-particle) の振る舞いを表していると考え，その粒子状のものを anyon と呼ぶ．これは boson, fermion を一般化して，phase が ± 1 以外の任意の絶対値 1 の複素数値を取りうるということから，any に on を付けて作られた名前である．非可換 anyon と呼ばれる粒子状のものがうまく実験的に作れればトポロジカル量子コンピュータの実現につながると期待されており，その研究が現在世界中で行われている．

代数的場の量子論と量子スピン系の研究において，似たような数学的構造が生じることはいくつか知られているが，両者の設定は技術的にはかなり異なっており，片方での結果の類似をもう片方で実行することは全く容易ではない．緒方氏の [29] ではまず，superselection criterion の適切な類似を考えることによって，$\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^2}$ の「たちのよい表現」を数学的に定義した．次にそれらのたちのよい表現の braiding を導入するのだが，ここで重要な役割を果たすのが Haag duality である．Haag duality とは代数的場の量子論で重要な役割を果たす性質で，時空領域 $\mathcal{O}$ での観測可能量が生成する作用素環 $A(\mathcal{O})$ と可換な作用素全体のなす環を記述するものである．緒方氏はこれを緩めたものに相当する approximate Haag duality という概念を導入し，この仮定の下で Hamiltonian が gap を持つということをうまく使って，braiding を定義することに成功した．さらに，これによって生じる，たちのよい表現たちのなす braided tensor category が topologial phase の不変量であることも証明したのである．これも，多くの技術的困難を克服した素晴らしい成果である．(なおさらに，これが modular tensor category になることまで期待されているが，superselection sector の数が有限個であることと，braiding が非退化であることはまだ証明されていない．）

以上の緒方氏の業績は，Henri Poincaré Prize や国際数学者会議招待講演でもわかる通り，国際的にも極めて高く評価されており，海外の研究集会などでは引っ張りだこである．技術的に近い研究をしている人が日本にごく少ない中，緒方氏がほとんど独力でこのような世界的水準に達したことは特筆すべきことと言える．まだまだ若い中，これからも世界的な成果を連発していくことを期待しているところである．なお本稿に関するレフェリーの方からのコメントに感謝するものである．

文　献

[1] S. Bachmann, S. Michalakis, B. Nachtergaele, R. Sims, Automorphic Equivalence within Gapped Phases of Quantum Lattice Systems, *Comm. Math. Phys.* **309** (2012), 835–871.

[2] S. Bachmann, Y. Ogata, C^1-classification of gapped parent Hamiltonians of quantum spin chains, *Comm. Math. Phys.* **338** (2015), 1011–1042.

[3] C. Bourne, Y. Ogata, The classification of symmetry protected topological phases of one-dimensional fermion systems, *Forum Math. Sigma* **9** (2021), Paper No. e25, 45 pp.

[4] O. Bratteli, D. W. Robinson, Operator Algebras and Quntum Statistical Mechanics 1, Springer, Berlin (1986).

[5] O. Bratteli, D. W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2, Springer, Berlin (1996).

[6] X. Chen, Z.-C. Gu, X.-G. Wen, Classification of gapped symmetric phases in onedimensional spin systems, *Phys. Rev. B* **83** (2011), 035107.

[7] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts, Local observables and particle statistics. I, *Comm. Math. Phys.* **23** (1971), 199–230.

[8] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts, Local observables and particle statistics. II, *Comm. Math. Phys.* **35** (1974), 49–85.

[9] Z.-C. Gu, X.-G. Wen, Tensor-entanglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order, *Phys. Rev. B*, **80** (2009), 155131.

[10] M. B. Hastings, X. G. Wen, Quasi-adiabatic continuation of quantum states: The stability of topological ground-state degeneracy and emergent gauge invariance, *Phys. Rev. B* **72** (2005), 045141.

[11] V. Jakšić, Y. Ogata, C.-A. Pillet, The Green-Kubo formula and the Onsager reciprocity relations in quantum statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.* **265** (2006), 721–738.

[12] A. Kapustin, R. Thorngren, A. Turzillo, Z. Wang, Fermionic symmetry protected topological phases and cobordisms, *J. High Energy Phys.* **2015** (2015), 052, front matter+20pp.

[13] A. Yu. Kitaev, Fault-tolerant quantum computation by anyons, *Ann. Physics* **303** (2003), 2–30.

[14] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, Two soluble models of an antiferromagnetic chain, *Ann. Phys.* **16** (1961), 407–466.

[15] T. Matsui, Boundedness of entanglement entropy and split property of quantum spin chains, *Rev. Math. Phys.* **25** (2013), 1350017, 31 pp.

[16] A. Molnar, Y. Ge, N. Schuch, J. I. Cirac, A generalization of the injectivity condition for projected entangled pair states, *J. Math. Phys.* **59** (2018) 021902.

[17] A. Moon, Y. Ogata, Automorphic equivalence within gapped phases in the bulk, *J. Funct. Anal.* **278** (2020), 108422, 45 pp.

[18] P. Naaijkens, Y. Ogata, The split and approximate split property in 2D systems: stability and absence of superselection sectors, *Comm. Math. Phys.* **392** (2022), 921–950.

[19] B. Nachtergaele, R. Sims, A. Young, Quasi-locality bounds for quantum lattice systems, I. Lieb-Robinson bounds, quasi-local maps, and spectral flow automorphisms, *J. Math. Phys.* **60** (2019), 061101.

[20] Y. Ogata, Large deviations in quantum spin chains, *Comm. Math. Phys.* **296** (2010), 35–68.

[21] Y. Ogata, Approximating macroscopic observables in quantum spin systems with commuting matrices, *J. Funct. Anal.* **264** (2013), 2005–2033.

[22] Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization I, *Comm. Math. Phys.* **348** (2016), 847–895.

[23] Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization II, *Comm. Math. Phys.* **358** (2016), 897–957.

[24] Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization III, *Comm. Math. Phys.* **352** (2017), 1205–1263.

[25] Y. Ogata, A $\mathbb{Z}_2$-Index of symmetry protected topological phases with time reversal symmetry for quantum spin chains, *Comm. Math. Phys.* **374** (2020), 705–734.

[26] Y. Ogata, A classification of pure states on quantum spin chains satisfying the split property with on-site finite group symmetries, *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B* **8** (2021), 39–65.

[27] Y. Ogata, A $\mathbb{Z}_2$-Index of symmetry protected topological phases with reflection symmetry for quantum spin chains, *Comm. Math. Phys.* **385** (2021), 1245–1272.

[28] Y. Ogata, An $H^3(G,\mathbb{T})$-valued index of symmetry protected topological phases with on-site finite group symmetry for two-dimensional quantum spin systems, *Forum Math. Pi* **9** (2021), Paper No. e13, 62 pp.

[29] Y. Ogata, A derivation of braided C^*-tensor categories from gapped ground states satisfying the approximate Haag duality, *J. Math. Phys.* **63** (2022), Paper No. 011902, 48 pp.

[30] Y. Ogata, An Invariant of Symmetry Protected Topological Phases with On-Site Finite Group Symmetry for Two-Dimensional Fermion Systems, *Comm. Math. Phys.* **395** (2022), 405–457.

[31] Y. Ogata, Classification of gapped ground state phases in quantum spin systems, to appear in the Proceedings of ICM 2022, arXiv:2110.04675.

[32] Y. Ogata, Y. Tachikawa, H. Tasaki, General Lieb-Schultz-Mattis type theorems for quantum spin chains, *Comm. Math. Phys.* **385** (2021), 79–99.

[33] Y. Ogata, H. Tasaki, Lieb-Schultz-Mattis type theorems for quantum spin chains without continuous symmetry, *Comm. Math. Phys.* 372 (2019), 951–962.

[34] F. Pollmann, A. Turner, E. Berg, M. Oshikawa, Entanglement spectrum of a topological phase in one dimension, *Phys. Rev. B* **81** (2010), 064439.

[35] F. Pollmann, A. Turner, E. Berg, M. Oshikawa, Symmetry protection of topological phases in one-dimensional quantum spin systems, *Phys. Rev. B* **81** (2012), 075125.

[36] K. Yonekura, On the Cobordism Classification of Symmetry Protected Topological Phases, *Comm. Math. Phys.* **368** (2019), 1121–1173.

(2022 年 0 月 0 日提出)

(かわひがしやすゆき 東京大学大学院数理科学研究科)