数理科学 II 期末予備テスト解答・解説

2002 年 6 月 27 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は，[1] から順に 15×3, 35, $20+15$, 30 点です．平均点は，69.3 点で次のような得点分布でした．採点はティーチングアシスタント (大学院生) の竹内君です．返す答案はコピーが取ってあります．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–109	110–145
23(人)	7	13	26	21	16	3	0

すべての問題で，形式的に微分方程式の両辺を割ったりするときに，分母が 0 になる場合の吟味が不十分なものは減点です．理論的根拠の説明などは下記の略解では簡単にしてありますが，答案ではもっと詳しく書かないと減点になります．本番の期末試験でも，形式，内容等は同程度のものが出ます．(同じ，あるいはそっくりな問題が出るという意味ではありません．)

[1] いずれも，解の存在と一意性が使える形をしている．(3) は定数係数の常微分方程式の一般論と言ってもよい．

(1) まず，$y = 0, -1$ (定数関数) はいずれも解である．解の一意性より，これ以外の解は，値 $0, -1$ を取らないので普通に変数分離形として解けばよい．答えは $y = \dfrac{1}{ce^{-x} - 1}$ (c は任意の定数) または $y = 0$. あるいは，$y = \dfrac{ce^x}{1 - ce^x}$ (c は任意の定数) または $y = -1$ と書いても同じことである．もちろん分母が 0 になるところではこの関数は定義されていない．

(2) 非斉次の一階線形方程式と思ってもよいし，$2xy$ を右辺に移項して変数分離形だと思ってもよい．$y = -\dfrac{1}{2}$ (定数関数) は解であり，解の一意性より，これ以外の解は，値 $-\dfrac{1}{2}$ を取らないことに注意する．答えは $y = -\dfrac{1}{2} + ce^{x^2}$. ($c$ は任意の定数．)

(3) $t^2 + 2t + 1 = 0$ の根は 2 重根 $t = -1$ だから，一般解は $y = ae^{-x} + bxe^{-x}$ の形である．条件より，定数 a, b を求めると $a = 1, b = 2$ となるので，$y = e^{-x} + 2xe^{-x}$.

[2] $x \neq 0$ では，$y' = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$ と書けて，解の存在と一意性が使える形をしており，さらにこれは同次形である．この解は普通に $u = \dfrac{y}{x}$ とおいて解いて，$y = \dfrac{x^2}{c - x}$ (c は任意の定数) と，$y = 0, -x$ である．($y = -x$ の方は $c = 0$ の場合と思ってよい．)$c \neq 0$ の場合は，

「実数全体で定義された解」にならないので，残る候補は $y=0,-x$ だけである．これらは，$x=0$ の場合も含めて解になっているので O.K. である．よって答えは $y=0,-x$.

[3] $y=e^{2x},xe^{2x},e^{-x}$ の 3 つも解であることに注意すると，$t=2$ が 2 重根，$t=-1$ が単根であるような 3 次方程式は $t^3-3t^2+4=0$ であるから，$a=-3,b=0,c=4$ である．

3 階の非斉次方程式は授業でやっていないが，2 回のときの類推で $y=ke^{3x}$ とおいて解を探してみると $k=1$ でよいことがわかる．よって答えは，e^{3x} である．(もちろん，これに $c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-x}$ を加えたものが一般解なのでこの形を挙げてもよい．)

[4] 答えはもちろんいくらでもあるが，たとえば，$y=cx(x-1)$ が解になるように考えて，$\dfrac{y}{x(x-1)}$ を微分してゼロとおいて分母をはらうと，

$$-(2x-1)y+x(x-1)\frac{dy}{dx}=0$$

が出る．これが確かに条件を満たしていることが確かめられる．この方程式では $x=2$ のとき，$y=2$ となる解は $y=x(x-1)$ である．($x\neq 0,1$ では解の一意性があるので，$y=cx(x-1)$ の形で $x=2$ のときに $y=2$ となるようにすればそれが唯一の解である．)