数理科学 II 期末テスト解答解説

2007 年 7 月 27 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] が 15 点 ×3, [2], [3], [4] が各 25 点の計 120 点満点です．この点数 x_2 が上に赤で書いてあります．第 2 回中間テストの点数を x_1 とすると，最終成績 x は前に予告したとおり，$x = 0.3\max(x_1, x_2) + 0.7x_2$ (を四捨五入したもの) として計算します．(ただし x_2 が 100 点を超えていたら 100 点で頭打ちです．) これが青で書いてある点数で，教務課に報告されるものです．採点ミスがあると思う人は，ただちに申し出て下さい．(返却する答案は，すべてコピーが取ってあります．)

期末テスト自体の最高点は 120 点 (2 人)，平均点は 69.4 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
31 (人)	13	27	30	18	16	15

最終成績 (青い数字) の平均点は 69.3 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
31 (人)	12	28	30	18	16	15

これによって，A, B, C, D の人数はそれぞれ，49, 44, 26, 31 人となります．

[1] (1) $x \neq 0, 1$ では，$y' = (2x-1)y/(x^2-x)$ と書けて，右辺とその y による偏微分は連続なので解の一意性が使えます．定数関数 $y = 0$ は明らかに解であり，解の一意性より他の解は値 0 を取りません．その場合は，変数分離として

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$$

と計算できて，$\log|y| = \log|x^2-x| + C$ (C は積分定数) となります．これより，$y = \pm e^C(x^2-x)$ を得ます．ここで，$\pm e^C$ を新たに c とおいて，$y = 0$ も解であったことを思い出すと，$y = c(x^2-x)$ (c は任意の定数) となります．これは今のところ，$x < 0, 0 < x < 1, 1 < x$ の場合で，この 3 つのそれぞれの場合で c の値が異なるかも知れません．

しかし，$x = 0, 1$ で微分可能になるようにつなぐには，$x < 0, 0 < x < 1, x > 1$ の各区間で c が共通でなくてはいけません．逆に $y = c(x^2-x)$ (c は任意の定数) とすれば，$x = 0, 1$ でも微分方程式は満たされています．よって，答えは $y = c(x^2-x)$ (c は任意の定数) です．

$x = 0, 1$ でどうつながるかを考察していない人がたくさんいました．単に連続につなぐと言うだけでは不十分です．

(2) これは 1 階線型方程式で，右辺を 0 とした斉次方程式 $y' = y\cos x$ をまず考えます．この右辺もそれを y で偏微分したものも連続なので解の一意性が使えます．定数関数 $y = 0$ は明らかに解であり，解の一意性より他の解は値 0 を取りません．その場合は変数分離として $\log|y| = \sin x + C$ (C は積分定数) と解けます．(1) と同様に定数関数 0 もあわせて，$y = ce^{\sin x}$ (c は任意の定数) と書けます．

元の方程式の解の一つとして $y=(x^3/3+x^2+3x)e^{\sin x}$ がすぐに見つかるので，答えは $y=(x^3/3+x^2+3x+c)e^{\sin x}$ (c は任意の定数) となります．もちろん定数変化法でもできます．

(3) 右辺を 0 とした斉次方程式については，2 次方程式 $t^2-4t+t=0$ の解が 2 重解 $t=2$ であることより，解は $y=(c_1x+c_2)e^{2x}$ (c_1, c_2 は任意の定数) となります．$y=x^2e^{2x}$ が非斉次方程式の解の一つであることはすぐにわかるので，答えは $y=(x^2+c_1x+c_2)e^{2x}$ (c_1, c_2 は任意の定数) となります．これももちろん定数変化法でもできます．

[2] 二つの解の差を取った，$\sin x - e^x$ は右辺を 0 とした斉次方程式 $y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+c_1y'+c_0y=0$ の解であることになります．このとき授業の一般論より，この斉次方程式は解，$\sin x, \cos x, e^x$ を持つことになり，n は 3 以上となります．$(t-1)(t^2+1)=t^3-t^2+t-1$ より，$y'''-y''+y'-y=0$ が $\sin x, \cos x, e^x$ を解に持つ，もっとも階数の低い定数係数線形常微分方程式です．あとは，非斉次方程式の右辺を $x+e^x$ が解になるように決めればよいので．$y'''-y''+y'-y=1-x$ が求める答えです．

[3] y_1 の形は $z_0+\alpha z_1+\beta z_2$ (α, β は任意の実数) で，y_2 の形は $w_0+\gamma w_1+\delta w_2$ (γ, δ は任意の実数) です．よって，V の元は，$z_0-w_0+\alpha z_1+\beta z_2-\gamma w_1-\delta w_2$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は任意の実数) の形です．($\alpha z_1+\beta z_2$, $\gamma w_1+\delta w_2$ の部分はそれぞれ斉次方程式の解です．) これらがベクトル空間をなすには，定数関数 0 がこの形に書けなければいけません．これより，$w_0-z_0=\alpha z_1+\beta z_2-\gamma w_1-\delta w_2$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はある実数) となります．(ただちに $w_0=z_0$ となるわけではありません．二つの特殊解が同じでなくてはいけない，と書いている人が多くいましたが,「うまく特殊解を選ぶと一致させられる」というのが正しいステートメントです．) 以下これが成り立ったとしましょう．すると，V は，$\alpha z_1+\beta z_2+\gamma w_1+\delta w_2$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は任意の実数) の形の関数全体からなる集合となります．この次元が 2 になる条件を求めるのですが，$\alpha z_1+\beta z_2$ (α, β は任意の実数) の形の関数全体が 2 次元になることが授業でやったことよりわかります．(Wronskian が 0 でないからです．) よって，V が 2 次元になるためには，w_1, w_2 が いずれも $\alpha z_1+\beta z_2$ (α, β は任意の実数) の形をしていないといけません．このとき，w_1, w_2 は斉次方程式 $y''+ay'+by=0$ の解になります．w_1, w_2 の形は授業でやってあるので，そのことから，2 次方程式 $t^2+ct+d=0$ の解がいずれも，2 次方程式 $t^2+at+b=0$ の解であることがわかります．二つの方程式の役割を入れ替えても同じ論法が使えるので，結局 2 次方程式 $t^2+at+b=0$ と 2 次方程式 $t^2+ct+d=0$ は同じものでなくてはならず，$a=c$, $b=d$ が導かれます．さらに $w_0-z_0=\alpha z_1+\beta z_2-\gamma w_1-\delta w_2$ と書けたことを使うと，w_0 はもともと，$y''+cy'+dy=g(x)$ の解であったのですが，$y''+ay'+by=f(x)$ の解でもあることがわかります．これより，$f(x)=g(x)$ が導かれます．

以上で，$a=c$, $b=d$, $f(x)=g(x)$ が必要条件であることがわかりましたが，これが十分条件であることはすぐにわかるので，これが答えです．

[4] (1) $t^3+at^2+bt+c=0$ は実数の解を少なくとも一つ持ちます．その一つを α とします．すると微分方程式は解 $e^{\alpha x}$ を持ちますが，これが有界になるには $\alpha=0$ でなくてはならず，このとき $c=0$ となります．

次に $t^2+at+b=0$ の解を考えますが，上と同様に考えて，これが 0 以外の実数解を持つことはできません．また解 0 をもってしまうと，もとの $t^3+at^2+bt+c=0$ が 2 重解 0 を持つことになり，このとき $y=x$ が微分方程式の解になりますがこれは有界ではありません．よって 2 次方程式 $t^2+at+b=0$ は実数解を持ちません．よって $a^2-4b<0$ となります．このとき $t^2+at+b=0$ の解は $\beta\pm\gamma i$ ($\gamma\neq 0$) の形になりますが，すると微分方程式は解 $y=e^{\beta x}\sin\gamma x$ を持ち，これが有界になるためには $\beta=0$ すなわち $a=0$ が必要です．よって，$a=c=0, b>0$ が必要となります．

逆にこのとき，微分方程式の解は $c_1 + c_2 \sin\sqrt{b}x + c_3 \cos\sqrt{b}x$ (c_1, c_2, c_3 は実数) となり，これは有界です．よって求める必要十分条件は $a = c = 0,\, b > 0$ です．

(2) すべての解が有界と仮定します．解の一つを取ると，解全体は，[この解]+[(1) の解] の形で表されます．今一つ取った解は有界なので，(1) の解の部分もすべて有界でないといけません．これより，(1) で求めた条件が必要条件であることがわかります．(このような説明なしに，いきなり「(1) の条件が必要である」と述べるのは説明が少し不足しています．)

そこで $a = c = 0,\, b > 0$ の場合を考えますが，もし $b \neq 1$ であれば，解の一つとして $(\cos x)/(1 - b)$ が取れます．これは有界なので，すべての解が有界となります．

$a = c = 0,\, b = 1$ のときは，$y = (-x \sin x)/2$ が解の一つですがこれは有界ではありません．

以上あわせて，$a = c = 0,\, b > 0$ かつ，$b \neq 1$ が答えです．