数理科学 II 期末テスト

2007 年 7 月 25 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

このテストは，ノート，本，コピーなどすべて持ち込み可で行います．途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．(多少欄外にはみ出してもかまいません．)

[1] 次のそれぞれの微分方程式を解け．解が本当にそれだけである理由をきちんと説明すること．(解の一意性に関する一般論を適用する場合は，何をどのように適用したかを述べること．)

(1) $(x^2-x)y'=(2x-1)y$.

(2) $y'-y\cos x=(x^2+2x+3)e^{\sin x}$.

(3) $y''-4y'+4y=2e^{2x}$.

[2] ある定数係数線型常微分方程式について，$x+\sin x$ は解の一つであり，また $x+e^x$ も解の一つであるとする．このような定数係数線型常微分方程式のうち，階数の最も低いものを求めよ．

ただし，定数係数線型常微分方程式 $y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+c_1y'+c_0y=f(x)$ の階数とは n のことであり，今 $c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}$ は実数としている．

[3] a,b,c,d を実数の定数，$f(x),g(x)$ を実数全体で定義された実数値連続関数とする．$y''+ay'+by=f(x)$ の解全体の集合を，V_1, $y''+cy'+dy=g(x)$ の解全体の集合を，V_2 とし，$V=\{y_1-y_2\mid y_1\in V_1,y_2\in V_2\}$ とおく．(解はすべて実数全体の上の関数と考えている．) V が実数上のベクトル空間になり，かつその次元が 2 になるための必要十分条件を求めよ．

[4] 実数全体で定義された実数値関数 $f(x)$ について，ある区間 $[p,q]$ が，すべての $f(x)$ の値を含むように取れるとき，$f(x)$ は有界であると言う．次の問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $y'''+ay''+by'+cy=0$ のすべての解が有界であるための必要十分条件を求めよ．ただし，a,b,c は実数の定数であり，微分方程式は実数全体の上で考えている．

(2) 微分方程式 $y'''+ay''+by'+cy=\sin x$ のすべての解が有界であるための必要十分条件を求めよ．ただし，a,b,c は実数の定数であり，微分方程式は実数全体の上で考えている．