数理科学 II 中間テスト (2) 解答解説

2007 年 6 月 20 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は，[1] が 10 点 ×4, [2], [3] が 30 点ずつです．受験者は 133 人，最高点は 100 点 (2 人)，平均点は 51.8 点でした．[2], [3] が少し難しかったようで，期末試験ではもう 15〜20 点ほど点が出るようにします．返却する答案はコピーが取ってあります．

[1] いずれも計算は簡単ですが，解が本当にそれしかないと言うことをきちんと示さないと減点です．

(1) まず，$x \neq 0$ の範囲で考えます．両辺を x でわったものは解の (存在と) 一意性の定理が使える形になっています．定数関数 $y = 0$ は明らかに解なので，その他の解は値 0 を取りません．その場合は，両辺を y で割って，$y'/y^2 = 1/x^2$ となります．両辺積分して，$-1/y = -1/x + C$ となり，整理して $y = x/(1 - Cx)$ (C は任意の定数) を得ます．次に $x = 0$ でどうつながるかを見ます．$y = x/(1 - Cx)$ を $x = 0$ でも連続にするには $y = 0$ とおかなくてはなりません．こうおくと，C の値が何であっても $x = 0$ のとき $y' = 1$ となって微分可能になり $x > 0, x < 0$ で C の値が違っても微分可能につながり，$x = 0$ でも微分方程式は成立していることがわかります．よって解は，$y = 0$ または，

$$y = \begin{cases} x/(1 - C_1 x), & x \geq 0 \text{ の時}, \\ x/(1 - C_2 x), & x < 0 \text{ の時}, \end{cases}$$

(C_1, C_2 は任意の定数) となります．

(2) 同次形なので，$y = ux$ とおいて u の方程式に直すと，$u'x = u^2$ となります．これは $x \neq 0$ の範囲で考えているのでそこで解の (存在と) 一意性の定理が使える形になって，また定数関数 $u = 0$ は明らかに解です．よってこれ以外の解では u は値 0 を取りません．その場合は，u で両辺を割って積分すると，$-1/u = \log|x| + C$ (C は任意の定数) を得ます．y の式に戻すと，$y = 0$ または $y = -x/(C + \log|x|)$ (C は任意の定数) となります．

(3) 右辺を 0 とした斉次方程式の解は Ce^{-x} (C は任意の定数) であることは簡単にわかります．右辺を e^{-x} とした非斉次方程式の解の一つは axe^{-x} (a は定数) の形で探して，xe^{-x} となります．さらに，右辺を x とした非斉次方程式の解の一つは，1 次式で探して $x - 1$ となります．以上をあわせて，$Ce^{-x} + xe^{-x} + x - 1$ (C は任意の定数) となります．

(4) 右辺を 0 とした斉次方程式の解は，$t^2 - 3t + 2 = 0$ の解が $t = 1, 2$ であることより，$C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ (C_1, C_2 は任意の定数) となります．右辺を $2x^2$ とした非斉次方程式の解の一つは，2 次式の中で探して，$x^2 + 3x + 7/2$ となります．以上をあわせて，$C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 7/2$ (C_1, C_2 は任意の定数) となります．

[2] $t^2 + pt + q = 0$ の解を考えて場合わけします．

(I) まず，$q \neq 0$ とします．このとき，定数関数 $y = r/q$ が非斉次方程式の解の一つとなるので，問題の微分方程式の解は,「斉次方程式の一般解」$+r/q$ の形になります．$+r/q$ はあってもなくても，値が実数全体を取るかどうかに関係ないので無視してかまわず，以下 (I) では $r = 0$ の場合を考えて，さらに場合を分けます．

(Ia) $p^2 - 4q > 0$ の場合．もう一度場合わけします．

(Ia-1) $q<0$ の場合．$t^2+pt+q=0$ の解は，正の実数 α と負の実数 β になります．$e^{\alpha x}-e^{\beta x}$ は解の一つで，すべての実数値を取るのでこの場合は O.K. です．また，$q<0$ であれば自動的に $p^2-4q>0$ になるので，条件としては $q<0$ だけを書けばよいことになります.

(Ia-2) $q>0$ の場合．$t^2+pt+q=0$ の解は，二つの実数 α, β で共に正か，共に負になります．このとき，解は $C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$ の形の関数で，これはすべての実数値を取ることはできません．(C_1, C_2 は任意の定数．)

(Ib) $p^2-4q=0$ の場合．$t^2+pt+q=0$ の解は，二重解 α で正か負になります．このとき，解は $C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$ の形の関数で，これはすべての実数値を取ることはできません．(C_1, C_2 は任意の定数．)

(Ic) $p^2-4q<0$ の場合．もう一度場合わけします．

(Ic-1) $p=0$ の場合．$t^2+pt+q=0$ の解は，純虚数 $\pm\alpha i$ (α は 0 でない実数) となります．このとき，解は $C_1\sin(\alpha x)+C_2\cos(\alpha x)$ の形の関数で，これはすべての実数値を取ることはできません．(C_1, C_2 は任意の定数．)

(Ic-2) $p\neq 0$ の場合．$t^2+pt+q=0$ の解は，$\alpha\pm\beta i$ (α, β は実数，$\alpha, \beta\neq 0$) となります．このとき $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ は解の一つで，すべての実数値を取るのでこの場合は O.K. です.

(II) $q=0$ の場合．さらに場合わけします.

(IIa) $p\neq 0$ の場合．さらに場合わけします.

(IIa-1) $r=0$ の場合．このとき，解は $C_1+C_2e^{-px}$ の形の関数で，これはすべての実数値を取ることはできません．(C_1, C_2 は任意の定数．)

(IIa-2) $r\neq 0$ の場合．$y=rx/p$ は解の一つで，すべての実数値を取るのでこの場合は O.K. です.

(IIa) $p=0$ の場合．さらに場合わけします.

(IIb-1) $r=0$ の場合．$y=x$ は解の一つで，すべての実数値を取るのでこの場合は O.K. です.

(IIb-2) $r\neq 0$ の場合．このとき，解は $rx^2/2+C_1x+C_2$ の形の関数で，これはすべての実数値を取ることはできません．(C_1, C_2 は任意の定数．)

以上をあわせて次の 4 つのケースが答えです.

(1) $q<0$.
(2) $p^2-4q<0$, $p\neq 0$.
(3) $p\neq 0$, $q=0$, $r\neq 0$.
(4) $p=q=r=0$.

[3] (1) $1-(x-y)^2$ が 0 でないところでは，両辺これで割ると，解の存在定理が使える形になるので，その点を通る解は存在します．一方，$1-(x-y)^2=0$ であれば，微分方程式は左辺が 0, 右辺が 2 となるので，その点では解はありません．よって答えは $y=x\pm 1$ です.

(2) $u=y-x$ とおきかえると，微分方程式 $(1-u^2)(u'+1)=1+u^2$ を得ます．これより，$(1-u^2)u'=2u^2$ となります．ある点で $1-u^2=0$ になったとすると，その点では左辺は 0, 右辺は 2 なので，この微分方程式は成り立ちません．その他の場合は，両辺を $1-u^2$ で割ることができ，解の (存在と) 一意性が使える形になります．この場合は，定数関数 $u=0$ は明らかに解であり，その他の解は値 0 を取りません．この場合については $(1-u^2)u'=2u^2$ の両辺を u で割って積分すると，$-1/(2u)-u/2=x+C$ (C は任意の定数) となります．$u=y-x$ として分母を払うと，$(x+C)^2-(y+C)^2=1$ を得ます．$y=x\pm 1$ 上の点は解は通らないことに注意してこれを解いて，$y=x$ または $y=-C\pm\sqrt{(x+C)^2-1}, y=x$ です．($y=-C\pm\sqrt{(x+C)^2-1}$ における x の範囲は $x>1-C$ または $x<-1-C$ です．)