数理科学 II 中間テスト (1) 解答解説

2007 年 5 月 23 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は，[1] が 10 点 ×4, [2], [3] が 30 点ずつです．受験者は 114 人，最高点は 100 点 (3 人)，平均点は 66.2 点でした．

[1] いずれも計算は簡単ですが，解が本当にそれしかないと言うことをきちんと示さないと減点です．

(1) $y' = -2xy$ と見ると，右辺は連続で，y で連続偏微分可能です．よって，解の (存在と) 一意性が成り立ちます．(存在も成り立ちますが，これから具体的に解くので，必要なのは一意性の方です．) まず，定数関数 $y = 0$ は明らかに解であり，解の一意性よりその他の解は値 0 を取りません．よって後者の場合は，$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -2x$ と変形でき，両辺 x で積分して $\log|y| = -x^2 + c$ となります．(c は積分定数．) これより，$y = \pm e^c e^{-x^2}$ となり，$\pm e^c$ のところを新たに C と書き，定数関数 $y = 0$ も合わせると，$y = Ce^{-x^2}$ (C は任意の定数) となります．

(2) $1 + y^2 \neq 0$ なので $\dfrac{1}{1+y^2}\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ と変形して，両辺 x で積分すると，$\arctan y = x^3 + C$ (C は任意の定数) となります．これより $y = \tan(x^3 + C)$ (C は任意の定数) となります．(同値変形しかしていないので，解の存在と一意性の定理は不要です．)

(3) $x \neq 0$ なので x で両辺を割ると $y' + \dfrac{1}{x}y = -1$ という 1 階線形常微分方程式になります．右辺を 0 とした斉次方程式 $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ をまず考えると，$y' = -\dfrac{1}{x}y$ と書いた右辺が連続かつ y で連続偏微分可能なので，今考えている $x \neq 0$ の範囲で解の (存在と) 一意性が成り立ちます．定数関数 $y = 0$ は明らかに解であり，解の一意性よりその他の解は値 0 を取りません．よって後者の場合は，$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x}$ と変形でき，両辺 x で積分して $\log|y| = -\log|x| + c$ となります．(c は積分定数．) これより，$y = \dfrac{\pm e^c}{x}$ となり，$\pm e^c$ のところを新たに C と書いて定数関数 $y = 0$ も合わせると，$y = \dfrac{C}{x}$ (C は任意の定数) となります．元の非斉次方程式に戻ると，定数変化法より $y = \dfrac{a(x)}{x}$ とおいて，$\dfrac{a'(x)}{x} = -1$ を解くことになります．この解はもちろん $a(x) = -x^2/2 + C$ (C は任意の定数) なので，元の微分方程式の解は $y = -x/2 + C/x$ (C は任意の定数) となります．

同次形と思ってもできます

(4) これは元から 1 階線形常微分方程式なので右辺を 0 とした斉次方程式 $y' - 2y = 0$ をまず考えます．これは何度もやった形で解は $y = Ce^{2x}$ (C は任意の定数) となります．元の非斉次方程式に戻ると，定数変化法より $y = a(x)e^{2x}$ とおいて，$a'(x)e^{2x} = 2x^2$ を解くことになります．この解は $a(x) = (-x^2 - x - 1/2)e^{-2x} + C$ (C は任意の定数) なので，元の微分方程式の解は $y = Ce^{2x} - x^2 - x - 1/2$ (C は任意の定数) となります．あるいは何らかの方法で，$x^2 - x - 1/2$ が一つの解であることを見つ

けても O.K. です．(たとえば 2 次式の解があると見当をつけて係数を決めればできます．)

[2] 1 階線形常微分方程式で，斉次形の解が $y = Cx^3$ でさらに非斉次形の一つの解が $y = x^4$ であれば O.K. です．前者から斉次方程式 $y' - \dfrac{3y}{x} = 0$ が得られ，$y = x^4$ を解にするには $y' - \dfrac{3y}{x} = x^3$ とすれば O.K. です．($y' - \dfrac{3y}{x} = 0$ の解が $y = Cx^3$ であるのは [1] と同様にして簡単にわかります．)

これでよいことにするつもりでしたが，解の形 $y = Cx^3 + x^4$ が $x = 0$ でも定義されているのに，$y' - \dfrac{3y}{x} = x^3$ の形が $x \neq 0$ でしか考えられないのがまずいと思って，分母をはらって $xy' - 3y = x^4$ の形を書いた人が多くいました．しかしこう書くと，$x \geq 0$ で $y = C_1x^3 + x^4$，$x \leq 0$ で $y = C_2x^3 + x^4$ という形の関数で $C_1 \neq C_2$ であるものも ($x = 0$ で微分可能につながっているので) 解になってしまいます．こういうことで迷わないような形で問題を出すべきでした．($x = 0$ を含め，かつこの問題を回避したければ,

$$(xy' - 3y - x^4)^2 + (y''''')^2 = 0$$

と書くことはできます．$y = Cx^3 + x^4$ は 4 次以下なので 5 階微分は 0 であり，また, 5 階微分まで存在しなくてはいけないことから上の形で $C_1 \neq C_2$ というケースが排除できるからです．)

[3] $xy \neq 0$ の範囲では，$y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ と書けて，この右辺は連続で，y で連続偏微分可能なので，解の存在 (と一意性) の定理が使えます．よって考慮すべき可能性があるのは，$a = 0$ または $b = 0$ の場合だけです．しかし，a, b の片方だけが 0 である場合は，元の微分方程式は明らかに満たされません．これより，a, b の片方だけが 0 である場合は答えに含まれます．残りは $a = 0, b = 0$ の場合ですが，これまでの考察だけではこの場合はわかりません．そこで，元の微分方程式を解くことにします．

まず $xy \neq 0$ の範囲で考えて，$y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ を解くことにします．これは同次形なので，$y = ux$ とおくと，$u'x + u = \dfrac{u^2 - 1}{2u}$ となります．$u^2 + 1 \neq 0$ なので $\dfrac{-2u}{u^2 + 1}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$ となり，両辺を x で積分して $-\log(u^2 + 1) = \log|x| + c$ (c は積分定数) を得ます．これより，$\dfrac{y^2}{x^2} + 1 = \pm e^{-c}\dfrac{1}{x}$ となり，$\pm e^{-c}$ を新たに $2C$ とおいて分母を払うと $y^2 + x^2 = 2Cx$, すなわち $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ (C は 0 でない定数) を得ます．$y = 0$ のところでこの関数を連続につなごうとすると，微分可能にすることができなくなります．また，$x = 0, y \neq 0$ の部分はこの関数たちのグラフが通りません．これより，答えは「$a = 0$ または $b = 0$」であることがわかります．(原点を通る解はないということです．)