

数理科学 II 期末テスト略解・解説

2005 年 7 月 28 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に $10 \times 3, 30, 30, 30, 30$ 点の計 150 点満点です。この点数 x_2 が上に赤で書いてあります。第 2 回中間テストの点数を x_1 とすると、最終成績 x は前に予告したとおり、 $x = 0.3 \max(x_1, x_2) + 0.7x_2$ (を四捨五入したもの) として計算します。(ただし x_1, x_2 とともに、100 点を超えていたら 100 点で頭打ちです。) これが青で書いてある点数で、教務課に報告されるものです。採点ミスがあると思う人は、ただちに申し出て下さい。(返却する答えは、すべてコピーが取ってあります。)

期末テスト自体の最高点は 143 点 (1 人)、平均点は 58.7 点、その得点の分布は次のとおりです。

| | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 0-49 (点) | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90-99 | 100- |
| 41 (人) | 15 | 4 | 13 | 7 | 10 | 15 |

最終成績 (青い数字) の平均点は 60.8 点、その得点の分布は次のとおりです。

| | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0-49 (点) | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90-99 | 100 |
| 39 (人) | 9 | 10 | 14 | 7 | 11 | 15 |

これによって、A, B, C, D の人数はそれぞれ、33, 19, 14, 39 人となります。

[1] 「解の存在と一意性の定理が使える」ということを前後とつながりなく、おまじないのように書いている人がたくさんいましたが、ただこれだけ書いても意味はありません。(1) を完全型として解いたときのように、必要十分条件の変形で答えに達すればそもそもこのことは不要です。変数分離として解くのであれば、このあとに「さらに定数関数 0 は解なので、それ以外の解は値 0 をとらない」とはっきり断る必要があります。

(1) 普通に変数分離として解いて、 $y = c/(x^2 + 1)$ (c は任意の定数) です。完全型と思っても解けます。

(2) 右辺を 0 とした斉次形の一般解が、 $ae^{2x} + bxe^{2x} + ce^{-x}$ です。また、多項式で特殊解をさがすと、 $y = x^2$ が見つかります。(これを定数変化法でやるとかなりめんどうです。) あとは初期条件を合わせて、 $e^{2x} - xe^{2x} + e^{-x} + x^2$ が解です。

(3) x^2 で割れば線形 1 階方程式です。右辺を 0 とした斉次形の一般解が cx^3 で、また特殊解 $1/x$ が見つかるので、初期条件を合わせて、 $-x^3 + 1/x$ が解です。

[2] 定数係数線形常微分方程式の解の形より、 $y = x \cos x$ が解であれば、 $y = \cos x, \sin x, x \sin x$ も解です。これらを解に持つ定数係数線形常微分方程式は最低 4 階で、4 階のときは、 $y'''' + 2y'' + y = 0$ とすれば O.K. です。

[3] $y = e^{2x} + e^{3x}$ と $y = e^{-x} + e^{3x}$ が解であれば、その差の $e^{2x} - e^{-x}$ は、右辺を 0 とした斉次形の解となります。定数係数線形常微分方程式の解の形より、斉次形の方程式でこの解を持つ最小階数のものは、 $y'' - y' - 2y = 0$ です。あとは、 e^{3x} が特殊解になるようにすればよいので、 $y'' - y' - 2y = 4e^{3x}$ を得ます。

[4] $x^2 - y^2 \neq 0$ であれば, 両辺これで割って, 解の存在定理が使える形になるので, その点を通る解はあります. また, $(0, 0)$ を通る解は定数関数 0 があります. $y = \pm x$, $y \neq 0$ の点では明らかに微分方程式を満たしていません. 以上より答えは, $y = \pm x$, $y \neq 0$ です.

この問題ではこのように, 微分方程式を解く必要はありません. もちろん解くこともできて, 同次形なので, $x^2 + (y - c)^2 = c^2$ (c は定数), または $y = 0$ を得ます. (ただし, $y = \pm x$, $y = 0$, $x = 0$ などの場合の考察に注意が必要です.) このことから上の答えが出ます.

[5] 2次方程式 $t^2 + at + b = 0$ の解によって場合わけします.

(1) 異なる 2 実根 $\alpha < \beta$ を持つ場合.

$\alpha < 0 \leq \beta$ が求める条件です.

(2) 2 重根 α を持つ場合.

問題の条件は満たしません.

(3) 実根でない二つの複素根を持つ場合.

問題の条件は満たしません.

以上をあわせて, a, b の条件で書くと, $b < 0$ または $(b = 0, a > 0)$ となります.