数理科学 II 期末テスト解答解説

2003 年 7 月 25 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に 10×3, 20, 20, 20, 20 点の 110 点満点です．この点数 x_2 が上に赤で書いてあります．中間テストの点数を x_1 とすると，最終成績 x は前に予告したとおり，$x = 0.3\max(1.3x_1, x_2) + 0.7x_2$ として計算します．(ただし $1.3x_1$ が 100 点を超えていたら 100 点で頭打ちです．) これが青で書いてある点数で，教務課に報告されるものです．採点ミスがあると思う人は，ただちに申し出て下さい．(返却する答案は，すべてコピーが取ってあります．)

期末テスト自体の最高点は 110 点 (4 人)，平均点は 65.3 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
40 (人)	19	15	17	23	16	17

最終成績 (青い数字) の平均点は 66.0 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
40 (人)	16	15	19	20	20	17

簡単な解答と解説は次のとおりです．

[1] (1) 右辺は連続で，y で連続偏微分可能なので，解の存在と一意性が使える．$y = 0$ は明らかに解で，他の解は値 0 をとらない．普通に変数分離で解いて答えは $y = Ce^{-x^2}$. (C は実数の定数．)

(2) 定数係数線形常微分方程式で右辺は x の連続関数なので，解の存在と一意性がわかる．右辺を 0 とおいた斉次形のときの一般解と，右辺を $2e^{2x}$ としたときの特殊解と，右辺を x としたときの特殊解を足せば一般解が出る．答えは $(C_1x+C_2)e^{2x} + x^2e^{2x} + (x+1)/4$. ($C_1, C_2$ は実数の定数．)

(3) e^x で両辺を割って，$y' = \cdots$ の形に書いたとき，その右辺は連続で，y で連続偏微分可能なので，解の存在と一意性が使える．斉次形のときの一般解は，$y = C\exp(\exp(-x))$ (C は実数の定数) で，また $y = x$ が特殊解であることがすぐにわかるので，答えは $y = C\exp(\exp(-x)) + x$.

[2] $C_1e^{-x} + e^{2x}$ と $(C_2x+C_3)e^x + x^2 + 4x + 6$ を足したものを一般解にすることになる．(C_1, C_2, C_3 は実数の定数．) よって，答えは $y''' - y'' - y' + y = 3e^{2x} + x^2 + 2x$.

[3] 二つの解の差をとった，$xe^{2x}-2e^{-x}$ が斉次方程式の解である．このとき，この斉次方程式は e^{2x}, xe^{2x}, e^{-x} の3つを解に持たないといけないので，$y'''-3y''+4y=0$ となる．あとは，e^{3x} が解であるようにすればよいので答えは，$y'''-3y''+4y=4e^{3x}$.

[4] $x \neq 0$ の範囲では，x で両辺を割って，$y' = \cdots$ の形に書いたとき，その右辺は連続で，y で連続偏微分可能なので，解の存在と一意性が使える．

また，$y=1$ は明らかに解であり，他の解は値 1 をとらないので，$x \neq 0$ の範囲で変数分離で解けて，$y=e^{cx}$ (c は実数の定数) を得る．$x=0$ でも微分可能につながっていないといけないので，実数全体で $y=e^{cx}$ (c は実数の定数) が答えである．

$(0,a)$, $a \neq 1$, が解を持たない初期値である．($a > 0$ は最初から仮定に入っている．)

[5] $\sin x, \sin 2x$ の両方が解であれば，a,b,c が実数なので，3 次方程式 $t^3+at^2+bt+c=0$ は，根 $t=\pm i, \pm 2i$ を持つことになるが，3 次方程式の相異なる根の数は最大で 3 なのでこれは不可能である．よってそのようなことはない.

あるいは，$y=\sin x, \sin 2x$ を直接微分方程式に代入してもよい.