数理科学 II 中間テスト (2) 解答解説

2003 年 7 月 15 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に 15×3, 20, 20, 15, 10+10 点の 120 点満点です．採点ミスがあると思う人は，ただちに申し出て下さい．(返却する答案は，すべてコピーが取ってあります．)

このテストの最高点は 93 点 (1 人)，平均点は 49.2 点，その得点の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–
49 (人)	22	18	7	6	4	0

このテストでは，しかるべき得点分布になるように配点，採点基準で調節してもらう予定でしたが，残念ながらそのようになっていません．そこで当初の予定を変更し，最終成績に加味する中間テストの点数としては今回の点数を 1.3 倍したものを使います．(ただし 100 点を超えた場合は 100 点で頭打ちです．) 式で書けば，中間テストの点数を x, 期末テストの点数を y としたとき，最終成績は $0.7y+0.3\max(y, \min(100, 1.3x))$ (を四捨五入した点数) となります．

解答と簡単な解説は次のとおりです．

[1] (1) 解の存在と一意性が使える形．$y = 0$ は明らかに解．それ以外の解は値 0 をとらないので，y^2 で両辺を割って，変数分離形．答えは $y = \dfrac{1}{x^2+C}$, C は定数, または $y = 0$.

(2) $\sin x \neq 0$ では，解の存在と一意性が使える形．$\sin x$ で両辺を割れば 1 階線形方程式．$y = \cos x$ は特殊解なので，$y = C \sin x + \cos x$ を得る．ここまでだと，$x = n\pi$ を超えるときに C の値が変わるかもしれないが，$x = n\pi$ の点でも y が微分可能につながっていないといけないので C は全体で定数で，これだけが解．

(3) 解の存在と一意性が使える形．右辺を $4x^2$ としたときの特殊解と，右辺を e^x としたときの特殊解と，右辺を 0 としたときの一般解を足せばよい．答えは $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7 - xe^x$.

[2] 2 次方程式の根が $t = 1 \pm i$ になるように選ぶことにより，斉次方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ を得る．あとは，e^{2x} が特殊解になるように非斉次方程式の右辺を決めればよい．答えは $y'' - 2y' + 2y = 2e^{2x}$ である．(両辺に 0 でない定数をかけてもよい．)

[3] これは完全形の微分方程式で，$x^2+y^2=c$ となる．一般解は $y=\pm\sqrt{c-x^2}$ (c は正の定数) で，x の動く範囲は $-\sqrt{c}<x<\sqrt{c}$ である．($x=\pm\sqrt{c}$ では微分可能でない．) また，この解が通らない点は，$\{(a,0) \mid a$ は任意の実数 $\}$ であるから，これが解を持たない初期値の集合である．

あるいは，$y \neq 0$ の範囲では，両辺を y で割れば，普通の変数分離形になり，解の存在と一意性が使える形になる．ほかにあるかもしれない解の可能性は，グラフが $y=0$ という直線上に乗っている場合しか残されていないが，そのような解はないことはすぐにわかるので，こちらからも上と同じ結論が導かれる．

[4] 3 次方程式 $t^3+at^2+bt+c=0$ は少なくとも一つの実根 α を持つ．$y=e^{\alpha x}$ が有界な解であるためには，$\alpha=0$ が必要十分であるので，まず $c=0$ を得る．次に，$t^3+at^2+bt+c=0$ が重根 0 を持ってしまうと有界でない関数 $y=x$ を解に持ってしまうので，0 は単根．このとき 2 次方程式 $t^2+at+b=0$ を見ると，微分方程式のすべての解が有界になるための必要十分条件は，この 2 次方程式が 0 でない純虚数の 2 根を持つことである．あわせてすなわち，答えは，$a=c=0, b>0$.

[5] (1) $f(x+1)$ を次々微分していったものは，$f'(x+1), f''(x+1), f'''(x+1)$ なので，$y=f(x)$ が $y'''+ay''+by'+cy=0$ を満たせば，$y=f(x+1)$ も満たす．また写像 A が，和と定数倍を保つこともすぐにわかる．

$f(x)$ のありうる形は，指数関数，三角関数などに限られているのですべての可能性を列挙して，それぞれについて A を記述してもできるがめんどうである．

(2) 条件を言い換えると，$f(x)=f(x+1)$ となる解がある，ということである．さらに言い換えれば，周期 1 の周期関数が解になる，ということでもある．ここで，周期 1 というのは，定数である場合や，周期が $1/k$ (k は正の整数) である場合も含んでいる．よって，条件は「定数関数を解に持つか，$\sin 2k\pi x$ を解に持つ」ということである．(後者の場合，自動的に $\cos 2k\pi x$ も解になる．) これらの場合をあわせて答えは，$c=0$ または「ある自然数 k に対して $c=4k^2\pi^2 a$ かつ $b=4k^2\pi^2$」である．