2002年度全学自由研究ゼミナール「超準解析」の講義内容

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

この講義は，教養課程の 1, 2 年生を対象にした自由選択のコースです．毎週水曜日の 16:20〜17:50 に，数理科学研究棟 126 号室で行います．講義内容は Non-standard Analysis (超準解析) と呼ばれる理論です．

$1 = 0.999\cdots$ や，$1/\infty = 0$ で本当にいいのだろうか? あるいは，$\infty \times 0$ は?

こういうことを考えて見たことのある人は多いと思います．また，高校で極限を習った時，何かごまかされているように思った人も少なくないことでしょう．たとえば，微分を計算する時に,「h は 0 でないから」と言って分子と分母を h で割っておいて，あとから $h = 0$ としているように見えます．またそもそも「限りなく近づく」とはどういうことでしょうか．高校の教科書をよく見ると，行列や三角関数の話などはかなり厳密に書いてあるのに，微分積分になると「$\cdots$ であることが知られている」と言って逃げているようなところがかなりあることにも気づきます．

数学は論理に依存する学問ですから，このような「ごまかし」の上に理論を築いていいはずがありません．このような極限に関連した理論を厳密に扱う一つの方法が，1 年生の数学 IA で扱う ε-δ 論法です．しかしこれとは別に，もっと直接的に，無限大，無限小，極限などを厳密に扱う理論として，Non-standard Analysis (超準解析) というものが 20 世紀後半に成立していて，この理論のもとでは，無限大や無限小を普通の実数と同じような数学的実体としてとらえることができ，四則演算も自由に行えます．この講義ではこの理論について初歩から講義します．この講義に対する予備知識としては，数学 IA の最初で教えるような厳密な実数論や，ε-δ 論法を理解していることと，抽象数学での論理的方法に対する「慣れ」を期待します．したがって，普通の基準で言えば主に 2 年生 (の数学的に優秀な人) を対象にしていますが，普通でない 1 年生は歓迎です．同じ内容の講義を 1998 年度にも行いましたが，そのときは出席者の半分以上は 1 年生でした．将来，数学またはそれに密接に関連した理論科学の研究者になりたいという人を想定して講義します．

私の専門は無限次元行列の集まりのようなものを研究する，作用素環論と言うものですが，この理論で 1983 年に Fields 賞を取った Alain Connes の理論では，Non-standard Analysis のアイディア，テクニックが重要な役割を果たしています．直接その理論をここで講義することはできませんが，そういうことにつながることをやって行きたいと思います．

参考文献は，齋藤正彦「超積と超準解析」(東京図書)，デービス「超準解析」(培風館) ですが，残念ながらいずれも出版社在庫切れです．両方とも教養の図書館にありますが，別にこれらの本を持っている必要はまったくありません．また，数理科学研究棟の図書館にも英語 (やフランス語) の Non-standard Analysis の本はいろいろあります．(教養の学生証でここの数理の図書館に入れます．)

なお，私の学会出張 (アメリカ，ドイツ，ルーマニア) のため，この授業は 6 月 12 日でおしまいです．(6/19, 6/26, 7/3 の 3 回が休講になります．)