Orbifold subfactors and an analogue of Connes' $\chi(M)$

河東泰之（東大・数理科学）

§0 Introduction

Jones 多項式以来，作用素環論，特に subfactor 理論の combinatorial な側面は，物理学，低次元トポロジーとの関係が深まって来ている．この講演の目的は，conformal field theory のアイディア，テクニックがどのように，subfactor 理論に応用されるか，またそれが古典的な，von Neumann 環の automorphism を中心とするアプローチからもいかに自然なものとみなされるか，を示すことにある．基本的な文献は，[EK1], [X], [Ka3] である．

まず，Ocneanu の paragroup [O1, O2] について簡単に復習しよう．AFD II_1 factor の index 有限の subfactor を分類するのに higher relative commutants が有用であることは早くから認識されていた．このアプローチで完全な分類を得るには，(1) tunnel から得られる higher relative commutants で元の subfactor が復元できるか？，(2) 復元できるとき higher relative commutants をどうやって combinatorial/algebraic に特徴付けるか？という 2 つの問題がある．第一の問題は純粋に関数解析的であり，最初 A. Ocneanu が finite depth（すなわち principal graph が有限）という仮定の下で O.K. であることを主張した．しかし彼の証明は発表されないまま，S. Popa の完全な証明が発表され，さらに Popa は，この形で subfactor が復元できるための必要十分条件をきれいな形で得た．一方，上の第二の問題は（finite depth の場合）全く代数的であり，A. Ocneanu によって，公理づけが発表され，この公理系を満たす新たな代数的対象は paragroup と名付けられた．この名前は，この概念が有限群の適当な意味での量子化と見なされることに由来する．こちらについても Ocneanu は完全な証明を書いていないが，彼の多くの講演をもと

に，今では完全に理解されている．この paragroup の公理系は，可解格子模型，rational conformal field theory， quantum $6j$-symbol から生じる 3 次元多様体に対する topological quantum field theory [EK2] などの公理系と大きく似ており，この類似性を追及することにより，subfactor の理解が深まると期待される．

特にここでは，可解格子模型でのテクニックから発した subfactor における orbifold construction [Ka1, Ka2, EK1] が，rational conformal field theory [BG, W] と組み合わせることによって明解に理解できること [X]，さらにそれが作用素環論での automorphism approach，特に Connes の invariant $\chi(M)$ [C1] や，modular automorphism group との類似という点から自然に解釈できることを示す．

§1 Paragroup の symmetry と orbifold subfactor

Subfactor での orbifold construction は，[Ka1] によって始められた．本来の目的は，A. Ocneanu が 1987 年に証明無しに予告した index< 4 の subfactor の A-D-E分類のうち Dに関する部分（principal graph D_{2n} は，一意的に実現されるが D_{2n+1}は，不可能である．）を証明することであった．この問題自体については，後に Ocneanu 本人の証明の細部[Ka2, Appendix] も明らかになったし，泉[I2]，Haagerup らによる別の証明もある．特に，D_{2n+1}の不可能性については，泉[I1]，Sunder-Vijayarajan らのように bimodule の tensor 積の分解のしかた（fusion rule）を見ることが簡単な証明を与える．しかし，orbifold construction は，より一般的な方法であること，subfactor の automorphism に関する情報を与えるという利点があるので，まずそれを解説する．

基本的な構成法は，paragroup が適当な symmetry を持つとき，それで割ってやることによって新しい paragroup を作る事である．グラフの symmetry については長田[Ch] で扱われているが，それを paragroup ですることになる．あるいは commuting square の symmetry といってもよ

い．しかし，ここで気を付けなくてはならないことは principal graph は distinguished vertex $*$（Bratteli diagram の第 1 番目=fusion algebra の単位元）を持つことである．もし，今考えている symmetry がこの$*$を動かさないならば，この symmetry は non-trivial な Loi の invariant [L] を引き起こし，[IK] のように subfactor の分類に役立てられるが，automorphism の立場からは，それほど面白いことは起こらない．もっと面白いのは，$*$が動く場合である．Dynkin 図形 A_{2n-3}は，そのような symmetry を持つことに注意する．すなわち，graph の反転である．（今，頂点の $\mathbf{Z}_2$-grading を保つ symmetry だけを考えているので A_{2n}は，symmetry を持たないとみなされる．）これで,「割った」グラフが D_nであることは容易にわかる．問題は，これが本当に（ある subfactor の）principal graph であるかどうかである．Paragroup の公理系は与えられているのであるから，この問題を調べるにはそれらの公理をチェックすればよいわけである．すると biunitarity（あるいは，unitarity + crossing symmetry といってもよい —— いわゆる local axioms）が満たされていることは直ちにわかる．そこでもう一つの公理 flatness が key point になるのである．これは，$*$から発する縦，横の string algebra が可換である，という条件で，parallel transport を用いて表すと，微分幾何の flat connection の discrete 版と見なすことができるので，flatness と名付けられた．Bimodule の intertwiner によるアプローチでは，この条件はある種の associativity を表しており，可解格子模型における Yang-Baxter 方程式，quantum $6j$-symbol の pentagon equation，rational conformal field theory における braiding-fusion relation などと密接な関係がある．

さて，orbifold construction における flatness であるが，これはいったん string algebra の可換性に置き換えたあと，適当な fixed point algebra を見ることにより，もとの paragroup に関する適当な partition function の評価に帰着することが示される．すなわち，もとの symmetry を持った paragroup で partition function を計算することができれば，orbifold construction を行ったあとの flatness がチェックできる，ということで

ある．この partition function の計算は一般には極めて困難だが，ある種のいい状況下では実行可能である．これを，A_{2n-3}型の subfactor に対して，直接実行したのが[Ka1] である．Partition function の計算結果は induction で，$(-1)^n$となり，これが n の偶奇によって，D_nの flatness の成立/不成立が別れる理由である．次いで，[EK1] では，この計算を Wenzl の $SU(N)$ 型 subfactor（= Hecke algebra subfactor of type A）に拡張しようとした．A_n型 subfactor は，この構成で $N = 2$ としたものなので，一般の Nについて partition function を計算しようとしたわけである．その結果，Nが奇素数のときはいつでも partition function は 1 となることがわかり，したがって，orbifold construction はいつでも新しい flat connection を与えることがわかった．すなわち，Nが 2 の時と奇素数の時とでは，大きな違いがあるわけである．我々はこの違いは，Nの偶奇だけによるものだと予想したが，Yang-Baxter 方程式[DZ, JMO] に基づく我々の計算は，かなり複雑で，一般の場合の計算は実行できなかった．そこに，F. Xu [X] が，Witten の lattice gauge theory を paragroup に応用する手法[BG] を使えば，完全に一般的な条件のもとでこの種の問題が解決できることを示したのである．

まず，Moore-Seiberg 型の rational conformal field theory では，ある種の combinatorial な公理を満たす行列 brading matrix と fusion matrix を扱うことに注意する．文献[BG] で示されたことは，このような行列があれば，自然に paragroup が作れる，ということであった．さらに進めて Xu は，これらの行列を用いて orbifold construction を行ったのである．それには，compact, connected, simply connected, simple な Lie 群 G と level と言われる整数から出発する．すると Wess-Zumino-Witten の構成を行った際，群 G の center が paragroup の symmetry としてはたらくことが証明できる．このとき partition function は，knotted graph に対する regular isotopy invariant として計算することができ，orbifold の flatness を決定するのは，Reidemeister move I に伴って発生する，conformal dimension である．これによって，上の $SU(2N)$ と

$SU(2N+1)$ の違いは，完全に一般的に証明できるのである．すなわち，Dynkin 図形 D_{2n}の D_{2n+1}の違いは，conformal dimension と orbifold construction による極めて一般的な現象の非常に特別な例として，明解に理解されるのである．Xu はさらにここに現われる flatness 成立のための level に関する条件が Dijkgraaf-Witten による G/Zに基づく Chern-Simons gauge theory の存在のための条件と同じであることも指摘している．

ここで注意しておくべきことは，上の orbifold construction によれば,（flatness の成り立つ場合）paragroup は作れるが，rational conformal field theory に必要なデータすべては作り出せない，ということである．実際，D_{2n}に対応する rational conformal field theory は作れない（S行列がうまく取れない）ことが知られている．また，泉[I1] による，fusion rule はあるが，flat connection の無いグラフ[I] もここに自然に現われる．したがって，この orbifold construction は，fusion rule の consistency，paragroup の公理，rational conformal field theory の公理の 3 つが，この順に本当に強くなっていることを自然に示している．

最後に注意として，Dynkin 図形 E_6, E_8の場合は，A_{11}, A_{29}からの paragroup action による orbifold と思うことが可能である．しかし，今のところ，こう思っても，何も計算上の利点は無いようである．

§2 Central sequence subfactor と Connes' $\chi(M)$ の subfactor 版

さて，§1 では orbifold construction を見たが，これは subfactor の言葉で言うと与えられた subfactor $N \subset M$に対し，適当な有限位数の自己同型αを構成して，同時 fixed point algebra $N^\alpha \subset M^\alpha$の paragroup を見ている，ということである．たとえば，A_{4n-3}の場合は，このような order 2 の自己同型によって D_{2n}が得られるわけである．するとこのとき，この自己同型は作用素環論的に見て，何か面白い条件を持つことが期待される．それが実際にそのとおりであることを示すのがここでの目標である．

まず，A_{4n-3}型の subfactor の $\mathbf{Z}_2$作用の場合を考えてみよう．この場合，同時 fixed point algebra で subfactor の型が D_{2n}に変わっていることに注意する．あとは，[L] のように，Connes 型の非可換 Rohlin の議論によって，この自己同型が approximately inner かつ centrally trivial であることがわかる．すなわち，Loi の結果によって approximate innerness は彼の invariant の triviality で判定できるので，outer period と asymptotic period が一致すれば，splitting ができて作用が具体的に決まってしまうからである．さらに，$SU(N)$ で，Nが奇素数のときも同様の議論が可能である．

しかし，実は partition function の計算をもう少し注意して実行すれば，A_{4n-1}型の subfactor のときも，同時 fixed point algebra の型は変わらないにもかかわらず，action は，centrally trivial であることが示せる．さらにこの方法と Xu による partition function の Witten 式の計算とを合わせると，Wenzl の subfactor で index が $\sin^2(N\pi/k)/\sin^2(\pi/k)$ の場合，$d=(k,N)$ とおけば $\mathbf{Z}_d$の自然な orbifold action が centrally trivial であることがわかるのである．

さて，こうして，centrally trivial な action がどう作られるかがわかったが，解析的な分類定理を得るには，“すべての”centrally trivial automorphism を決定することが必要である．ここでは，そのため，A. Ocneanu による central sequence subfactor の方法を使うことにする．以下，subfactor $N\subset M$は，AFD, irreducible, finite index, finite depth とする．このとき，subfactor $N^\omega\cap M'\subset M_\omega$を考えることが Ocneanu 方式の核心である．Ocneanu は，この subfactor について，index の式，higher relative commutant についての，asymptotic inclusion $M\vee(M'\cap M_\infty)\subset M_\infty$との比較など多くの定理を証明の細部無しに[O2] で予告した．しかし，これらのうち必要な statement は，全部きちんと証明できるのである．一方，centrally trivial automorphism があったとするとそれは，上の central sequence subfactor の dual principal graph に反映されることが直ちに解るので，この論法で，$\mathrm{Ct}(M,N)/\mathrm{Int}(M,N)$

のサイズに対する上からの評価が得られるのである．すなわち，Mは，Nの non-trivial な normalizer を含まないとしたとき，上の群のサイズは “dual principal graph の even vertex のうち，normalized Perron-Frobenius weight の値 1 を持つ頂点の数” でおさえられることになる．上の $SU(N)$ の場合は，この上界が attain されていることはすぐにわかる．

さらに，single factor の場合の Connes' $\chi(M)$ [C1] にならって

$$\chi(M,N)=(\overline{\mathrm{Int}}(M,N)\cap\mathrm{Ct}(M,N))/\mathrm{Int}(M,N)$$

とおこう．すると，これは可換群であり，exact sequence などの基本的性質は single factor の時と同様であることが解る．さらに上の上界もなりたっているわけである．上のように partition function の計算に帰着させることにより，rational conformal field theory から発生する subfactor ではいつでも，$\chi(M,N)$ が決定できることになる．また，テンソル積を使えば，すべての有限 abel 群が，$\chi(M,N)$ として実現できることもわかる．

一方，Popa [P], 長田-幸崎[CK, Ko] は，別方向から $\mathrm{Aut}(M,N)$ の研究を行っていた．彼らは，同時に strogly outer = properly outer の notion に到達し，Popa[P] は，strongly amenable subfactor に対し，strongly outer と，centrally trivial の否定が同値であることを証明し，また長田-幸崎[CK, Ko] は，strong outerness の否定を canonical endomorphism を用いて特徴付けた．これら 2 つの結果を合わせると上の$\chi(M,N)$ のサイズの上界は，strongly amenable の場合でも正しいことが解るのである．

また，orbifold construction と sector（または，bimodule）の関係も次のように解る．まず，簡単のため A_{2n+1}型の subfactor を取ろう．$*$ ではない方の graph の端点は（単なる endomorphism ではなく）automorpphism を表しており，今の場合 $\mathrm{Aut}(M,N)$ の元を与える．これは，

centrally trivial であるから，上の議論より，ここに現われた automorphism は，orbifold construction で具体的に作ったものと同じであることが解るのである．さらに，これは rational conformal field theory から生じるすべての subfactor について成り立つ．ここでのポイントの一つは，strong outerness の崩れをチェックするより，central triviality をチェックすることのほうがしばしば易しい，と言うことである．

ただし，いつでも上の上界が attain されるわけではないことに注意する．その例は，Haagerup が構成した index $= (5+\sqrt{13})/2$ の finite depth subfactor である．このとき上界は 3 を与えるが，実際の$\chi(M, N)$ は 0 である．この注意は，泉，幸崎による．

§3 $\mathrm{Aut}(M, N)$ の分類と modular automorphism との類似

次にここでは，上の$\chi(M, N)$ が，single factor の場合と比較して，どのように "解釈" できるかを論ずる．Connes は single factor の場合，$\chi(M)$ が non-trivial な II_1 factor をいろいろと作って見せたが，それらはいずれも普通研究されているのとはかなり異なった factor である.（AFD でも，non-Γでも$\chi(M)$ は 0 になってしまう.）一方，上述の Hecke algebra subfactor などは subfactor 理論においてもっとも基本的な object であり，このような普通でない factor の類似物と考えるべきではない．実は，正しい類似物は (AFD) type III factor なのである．そこでまず，AFD type III factor M の自己同型群について復習しておこう．Connes-Takesaki module を mod，extended modular automorphism を$\bar\sigma$と書くことにすれば，$\mathrm{Ker}(\mathrm{mod}) = \overline{\mathrm{Int}}(M)$, $\mathrm{Ct}(M) = \{\mathrm{Ad}(u)\cdot\bar\sigma; u \in \mathcal{U}(M)\}$ が成り立つ．これは，70 年代半ばに Connes によって証明無しにアナウンスされ，証明は，近年[KST] で与えられたものである．これを上の (type II_1) subfactor の話とを比べてみれば，Loi の invariant $\leftrightarrow$ Connes-Takesaki module, orbifold action $\leftrightarrow$ (extended) modular automorphism という対比があることが解る．また，paragroup それ自身が III 型 factor の flow of weights と類似したものであることもよく知られている．以下，この対比が合理的なものであることの “証拠” をいくつかあげよう．

[1] 長田-幸崎の non strongly outer automorphism の characterization は，自己同型を Jones tower に拡張したとき “ほとんど inner” という条件である．一方，III 型 factor の場合，（up to inner automorphism で）extended modular automorphism である，という条件は，modular automorphism group による接合積に延長したときに inner になる，という Haagerup-Størmer の条件と同値である．（これには，amenability は，必要ない．）ここで，basic construction, downward basic construction は，それぞれ modular automorphism group による接合積と centralizer に対応している．

[2] Longo は，すでに彼の canonical endomorphism が modular automorphism に似ていることを最初から指摘している．長田-幸崎の方法により，canonical endomorphism の power の既約分解に現われる automorphism を見れば，さらに類似が（II_1型の場合でさえ）はっきりして来る．Longo が問題としている，KMS 条件の類似などもこの見方のほうがあつかいやすいのではないかと思われる．

[3] A_{4n-3}型 subfactor の場合，上述の $\mathbf{Z}_2$作用で，接合積を取り，双対作用を見れば，D_{2n}型 subfactor のしっぽの 2 頂点を交換しているものになっていることが解る．この 2 つの作用の duality は，III 型の場合の Connes-Takesaki module と Sutherland-Takesaki modular invariant の duality との類似である．

[4] Popa による subfactor 上の離散 amenable 群作用の分類は，properly outer (= centrally free) action は，Loi の invariant で分類される，という形であり，これは，III 型 injective factor 上の離散 amenable 群の centrally free 作用は Connes-Takesaki module で分類される，という形の類似である．この III 型の結果は，Connes, Ocneanu, Sutherland-Takesaki, Kawahigashi-Sutherland-Takesaki の結果を合わせたものである．

また，subfactor 上のある種の群作用は，modular obstruction の類似の導入によって III 型 factor の時と同様に分類されることも注意する．（ただし，III_1型の時の離散可換群作用の分類には，$\mathbf{R}$ が divisible であることを用いている．今の場合，この類似は不成立のため，全部同じようにできるわけではない.）

以上のことから考えられることは，III 型 factor でのさまざまな現象は discrete な形で II_1型の subfactor に現われるであろう，ということである．さらに III 型 subfactor の場合は，この II_1型の discrete な現象と，もともとの III 型の single factor での現象が，混ざって現われると考えられる．C. Winsløw [Wn] による Connes-Takesaki module と Loi の invariant の同時拡張はそのような混ざった現象の最初の例である．

（不完全な）参考文献リスト
（詳しくは，[Ka3] 内の引用文献を見よ.）

[BG] J. de Boer & J. Goeree, *Markov traces and II_1 factors in conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 267–304.

[Ch] M. Choda, *Duality for finite bipartite graphs*, to appear in Pac. J. Math.

[CK] M. Choda & H. Kosaki, *Strongly outer actions for inclusion of factors*, preprint, 1992.

[C] A. Connes, *Sur la classification des facteurs de type II*, C. R. Acad. Sc. Paris **281** (1975), 13–15.

[DZ] P. Di Francesco & J.-B. Zuber, *$SU(N)$ lattice integrable models associated with graphs*, Nucl. Phys. **B338** (1990), 602–646.

[EK1] D. Evans & Y. Kawahigashi, *Orbifold subfactors from Hecke algebras*, preprint, 1992.

[EK2] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *From subfactors to* 3*-dimensional topological quantum field theories and back*, preprint 1992.

[I1] M. Izumi, *Application of fusion rules to classification of subfactors*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **27** (1991), 953–994.

[I2] M. Izumi, *On flatness of the Coxeter graph* E_8, to appear in Pac. J. Math.

[IK] M. Izumi & Y. Kawahigashi, *Classification of subfactors with the principal graph* $D_n^{(1)}$, (to appear in J. Funct. Anal.)

[JMO] M. Jimbo, T, Miwa, & M. Okado, *Solvable lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **116** (1988), 507–525.

[Ka1] Y. Kawahigashi, *On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors*, preprint, 1990.

[Ka2] Y. Kawahigashi, *Exactly solvable orbifold models and subfactors*, (to appear in Proceedings of the Conference on Functional Analysis and Related Topics, Kyoto, 1991.)

[Ka3] Y. Kawahigashi, *Centrally trivial automorphisms and an analogue of Connes'* $\chi(M)$ *for subfactors*, preprint, 1992.

[KST] Y. Kawahigashi, C. E. Sutherland, & M. Takesaki, *The structure of the automorphism group of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group actions*, Acta Math. **169** (1992), 105–130.

[Ko] H. Kosaki, *Automorphisms in irreducible decompositions of sectors*, preprint, 1992.

[L] P. H. Loi, *On automorphisms of subfactors*, preprint, 1990, UCLA.

[O1] A. Ocneanu, *Quantized group string algebras and Galois theory for algebras*, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, 1988, pp. 119–172.

[O2] A. Ocneanu, "Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors", University of Tokyo Seminary Notes 45, (Notes recorded by Y. Kawahigashi), 1991.

[P] S. Popa, *Classification of actions of discrete amenable groups on amenable subfactors of type II*, preprint, 1992.

[Wn] C. Winsløw, *Approximately inner automorphisms on inclusions of type III*$_\lambda$ *factors*, preprint, 1992.

[Wt] E. Witten, *Gauge theories and integrable lattice models*, Nucl. Phys. **B322** (1989), 629–697.

[X] F. Xu, *Orbifold construction in subfactors*, preprint, 1992.