1996 年度解析学 IV 追試

1996 年 12 月 17 日
河東泰之

この試験は自筆ノート持ち込み可で行います.（本，プリント，人のノートのコピーなどは不可です.）時間は 3 時間です．問題はたくさんありますが，1 問 20〜30 点でつける予定なので，適当に選択して解いてください.

[1] $f(x)$ を $[0,1]$ 上の複素数値関数とする．$|f(x)|$ が Lebesgue 可測であると仮定したとき，$f(x)$ も Lebesgue 可測であると言えるか．理由をつけて答えよ.

[2] $f(x)$ を，$(1,\infty)$ 上の複素数値 Lebesgue 可積分関数とする.

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^n}\,dx$$

を求めよ．計算の根拠もきちんと示すこと.

[3] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の複素数値 Lebesgue 可測関数で，ほとんどいたるところ微分可能なものとする．この時,

$$g(x)=\begin{cases} f'(x), & f(x)\text{ が微分可能なとき,}\\ 0, & f(x)\text{ が微分不可能なとき,}\end{cases}$$

と定義した $g(x)$ は，$\mathbf{R}$ 上 Lebesgue 可測であることを示せ.（証明は詳しく書くこと．安易に「明らかに」などとしたものは減点である.）

[4] $p,q\in[1,\infty]$ とする．$p\neq q$の時，$L^p(0,1)$ と $L^q(0,1)$ は異なることを示せ．ただし，測度は Lebesgue 測度を考えている.

[5] $f(x)\in L^1(\mathbf{R})$ とし，$g(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の複素数値微分可能関数とする．さらに，$g(x), g'(x)$ は $\mathbf{R}$ 上有界と仮定する．この時,

$$h(x)=\int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y)\,dy$$

とおけば，$h(x)$ は微分可能な関数であって,

$$h'(x)=\int_{-\infty}^\infty f(x-y)g'(y)\,dy$$

となることを示せ.

[6] $p\in(1,\infty)$ とし，$f(x)\in L^p(\mathbf{R})$ と$\varepsilon>0$ が任意に与えられたとする．この時，$\mathbf{R}$ 上の連続関数 $g(x)$ で，ある有界区間の外では 0 となり，$\|f-g\|_p<\varepsilon$となるものが存在することを示せ.