解析学 IV 小テスト No. 4 の簡単な解説

1996 年 5 月 14 日
河東泰之

今度は前回よりだいぶやさしくしたつもりです.

[1] $n, k \in \mathbf{N}$ に対し，$(-n, n] \times \{0\} \subset (-n, n] \times (-1/k, 1/k]$ なので $k \to \infty$ として，$\mu((-n, n] \times \{0\}) = 0$. $\mathbf{R} \times \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n] \times \{0\}$ だから$\mu(\mathbf{R}) = 0$.

[2] 任意の$\varepsilon > 0$ に対し，$n \in \mathbf{N}$ が存在して，$|x - y| < 1/n$ ならば，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$である．そこで，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$a_k \in \mathbf{R}$ をうまく取ると，$x \in ((k-1)/n, k/n]$ ならば，$f(x) \in (a_k, a_k + \varepsilon]$ となるようにできる．この時集合 A は$\bigcup_{k=1}^{n} ((k-1)/n, k/n] \times (a_k, a_k + \varepsilon]$ に含まれるので，$\mu(A) \leq \varepsilon$となり，$\mu(A) = 0$ である．

[3] Cantor set の類似をやろうとした人がたくさんいて，そういうふうにもできますが，もっとずっと簡単にできます.

例えば，$\mathbf{R} \times \mathbf{Q}^{n-1}$．または，$\mathbf{Q}^n \cup \{(t, 0, \ldots, 0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

[4] 自然数 n に対し，$A_n = \{x \in X \mid f(x) < -1/n\}$ とおけば，$\mu(A_n) = 0$ で，$\{x \in X \mid f(x) < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ だから，$f(x) \geq 0$ a.e. である．

配点は各問 25 点です．最高点 100 点（4 人），平均点は 42.2 点でした.