解析学 IV 小テスト No. 3 の簡単な解説

1996 年 5 月 7 日
河東泰之

[2], [3] は難しすぎたでしょうか．ほぼ全滅に近いできでした．ですから，[2], [3] については完全な解答を示します．

[1] 内側と外側から長方形の有限和で近似すれば 1/2 であることが示せる．

[2] まず，$\Gamma(A)$ は A に含まれる整数の数を数えていると思われるので，これを厳密に示す．
n を整数とし，$\Gamma(\{n\})=1$ をまず示す．$\{n\}\subset(n-1/2,n+1/2]$ で，$m((n-1/2,n+1/2])=1$ だから，$\Gamma(\{n\})\le 1$ である．次に，$\{n\}\subset\bigcup_{k=1}^\infty I_k$, $I_k\in\mathcal{F}$ とする．するとある kについて，$\{n\}\subset I_k$となっており，I_kは半開区間の有限和だから，その半開区間の一つが n を含んでいる．すると，$\sum_{k=1}^\infty m(I_k)\ge m(I_k)\ge 1$ となり，$\Gamma(\{n\})\ge 1$ である．これより，$\Gamma(\{n\})=1$ がわかった．次に，$\{n\}=\bigcup_{k=1}^\infty(n-1/k,n+1/k]$ であるから，$\{n\}$ はΓ-可測である．これより，任意の整数の集合 A はΓ-可測であり，$\Gamma(A)$ は A の個数（無限大も含む）に等しいことがわかる．
次に，整数 n に対し，$(n,n+1)=\bigcup_{k=1}^\infty(n,n+1-1/k]$ で，$m((n,n+1-1/k])=0$ なので，$\Gamma((n,n+1))=0$ である．これより，$\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}(n,n+1)$ だから，劣加法性より，$\Gamma(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})=0$ である．
これらを用いて，$A\subset\mathbf{R}$ に対し，$\Gamma(A)$ を計算する．劣加法性と単調性を用いて，

$$\Gamma(A\cap\mathbf{Z})\le\Gamma(A)\le\Gamma(A\cap\mathbf{Z})+\Gamma(A\cap(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}))\le\Gamma(A\cap\mathbf{Z})+\Gamma(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z})=\Gamma(A\cap\mathbf{Z})$$

を得る．$A\cap\mathbf{Z}\subset\mathbf{Z}$ だから，これは，$\Gamma(A)$ は，A に含まれる整数の個数に等しいことがわかる．
すると，$\mathbf{R}$ の任意の部分集合 A,Eについて，$\Gamma(A)=\Gamma(A\cap E)+\Gamma(A\cap E^c)$ が成り立つので，$\mathbf{R}$ の任意の部分集合 EはΓ-可測である．

[3] まず，$\mathbf{R}$ を次のように表す．

$$\mathbf{R}=\bigcup_{n=1}^\infty(-n,-n+1]\cup\bigcup_{n=2}^\infty(1/n,1]\cup\bigcup_{n=1}^\infty(n,n+1]$$

すると，右辺に現れるすべての半開区間について，m の値が 0 だから，$\Gamma(\mathbf{R})=0$ である．よって，単調性により，すべての $A\subset\mathbf{R}$ について，$\Gamma(A)=0$ である．
この時，$\mathbf{R}$ の任意の部分集合 A,Eについて，$\Gamma(A)=\Gamma(A\cap E)+\Gamma(A\cap E^c)$ が $0=0$ で成り立つので，$\mathbf{R}$ の任意の部分集合 EはΓ-可測である．

配点は 1 番から順に，40, 30, 30 点です．最高点は，75 点，平均点は 27.2 点でした．