解析学 IV 小テスト No. 4

1996 年 5 月 7 日
河東泰之

自分のノートを参照してよい.（本などは見ないこと.）

[1] $\mathbf{R}$ を $\mathbf{R}\times\{0\}$ と同一視して，$\mathbf{R}^2$の部分集合とみなす．この集合の（$\mathbf{R}^2$における）Lebesgue 測度を求めよ.

[2] $f(x)$ を $[0,1]$ 上の実数値連続関数で，常に $f(x)>0$ となるものとする．$\mathbf{R}^2$の部分集合 A を $A=\{(x,f(x))\mid x\in[0,1]\}$ で定めるとき，この集合の Lebesgue 測度を求めよ.

[3] $n\geq 2$ の時，$\mathbf{R}^n$の部分集合 A で，Lebesgue 測度は 0 だが，連続濃度を持ち，かつ $\mathbf{R}^n$ で稠密になるようなものの例を一つあげよ.

[4] $f(x)$ は，測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上の実数値関数で，すべての正の実数εについて，$f(x)\geq-\varepsilon$ a.e. とする.（すなわち，Xの部分集合 $\{x\in X\mid f(x)<-\varepsilon\}$ は，測度 0 を持つ.）この時，$f(x)\geq 0$ a.e. であることを示せ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．[1], [2], [3] は答だけでなくきちんと説明をつけてください.