解析学特別演習 I・レポート問題

1996 年 12 月 18 日
河東泰之

解析学特別演習 I の単位を落としている人のためのレポート問題です．解析学 IV の単位を（本試験または追試験で）取っていることがレポート提出の資格です．以下の問題をすべて解いて，1 月 10 日までに事務室に提出してください．

[1] $f(x)$ を $[0,1]$ 上の有界な Lebesgue 可測関数とする．任意の自然数 n と，$0 \le k \le n-1$ となる自然数 k に対し，$g_{k,n}(x) = \chi_{[k/2^n,(k+1)/2^n]}(x)$ とおいたとき，$\displaystyle\int_0^1 g_{k,n}(x)f(x)\,dx = 0$ であるとする.（ただし，$\chi_{[k/2^n,(k+1)/2^n]}(x)$ は区間 $[k/2^n,(k+1)/2^n]$ の特性関数を表す.）このとき，$f(x)$ は $[0,1]$ 上ほとんどいたるところ 0 に等しいことを示せ.

[2] $p \in (1,\infty)$ に対して，複素数列の空間 $\ell^p(\mathbf{Z})$ を，$\{(a_n)_{n\in\mathbf{Z}} \mid \sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n|^p < \infty\}$ と定義し，$a = (a_n) \in \ell^p(\mathbf{Z})$ に対し $\|a\|_p = (\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n|^p)^{1/p}$ とおく．

$x = (x_n) \in \ell^1(\mathbf{Z})$ を固定し，$a = (a_n) \in \ell^2(\mathbf{Z})$ に対し，数列 $x * a$ を $(x*a)_n = \sum_{k\in\mathbf{Z}} x_{n-k}a_k$ と定める．次の 3 つを示せ.

(1) すべての $n \in \mathbf{Z}$ について，無限級数 $\sum_{k\in\mathbf{Z}} x_{n-k}a_k$ は絶対収束する.

(2) $x * a \in \ell^2(\mathbf{Z})$ である.

(3) $\|x*a\|_2 \le \|x\|_1\|a\|_2$ である.

[3] 次の条件を満たす $\mathbf{R}$ 上の複素数値 Lebesgue 可測可積分関数 $f(x)$ をすべて求めよ．きちんと根拠を説明すること.

$\mathbf{R}$ 上の任意の複素数値有界 Lebesgue 可測関数 $g(x)$ と任意の実数 t に対し，

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)f(x)\,dx$$

が成り立つ.

[4] 次の条件を満たすような $\mathbf{R}$ 上の L^2-関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つ挙げよ．きちんと説明をつけること.

$\mathbf{R}$ 上の連続関数 $g(x)$ で，ある有界区間の外では 0 になるようなものすべてについて，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)\,dx \to 0$$

であるが，$\mathbf{R}$ 上のある L^2-関数 $f(x)$ については，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)f(x)\,dx \to 0$$

とはならない.

[5] $f(x) \in L^\infty(0,1)$ とする．このとき，

$$\sup_{g\in L^1(0,1),\|g\|_1\neq 0} \frac{\|fg\|_1}{\|g\|_1} = \|f\|_\infty$$

であることを示せ.