解析学 IV 小テスト No. 14 の簡単な解説

1996 年 7 月 23 日
河東泰之

ほぼ壊滅的なできで，ほとんどの人は 0 点でした．最高点は 20 点（3 人），平均点は 3.8 点です．

それから，青い数字で書いてあるのは演習の（悪い 2 回分を除いた）平均点とそれに基づく仮の成績です．期末試験の成績がこの仮の成績より特に良ければプラスアルファがつきますが，そうでなければこれが演習の最終成績になります．この平均点の分布は次のとおりです．

0–9 (点)	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–100
17(人)	11	2	5	1	4	3	5	1

成績との対応は，60 点以上が A，40～59 点が B, 20～39 点が C, 19 点以下が D です.（何回か難しい問題も出したことがあり，本来今年度より必修からはずすはずだった演習なので，20 点でも通しますが，期末試験についてはそんなことはしません.）

問題の正解を以下に示します．みんなできていないので詳しく書きます．まず基本的な考え方は，次の通りです．

・もし $\{f_n(x)\}_n$が有界であれば，Lebesgue の収束定理が使える．

・$\{f_n(x)\}_n$は一般に有界ではない．しかし，$\|f_n\|_2 \le 1$ ということは 2 乗して積分してもなお一様に有界なのだから，2 乗する前の関数値が大きいところは「少し」しかない．だから，その「少し」の部分で関数値を有界になるように変更してやって，Lebesgue の収束定理に持ち込み，この変更が積分値にほとんど影響しない事を示せばよい．そのために Cauchy-Schwarz の不等式を用いる．

実際の証明は次のとおりです.

通常のように，f_n, fを正の部分，負の部分に分けて，$f_n = f_{n,+} - f_{n,-}$, $f = f_+ - f_-$とする．$\|f_{n,\pm}\|_2 \le 1$ で，$f_{n,\pm} \to f_\pm$，a.e. だから，最初から $f_n \ge 0$, $f \ge 0$ として一般性を失わない．

一般に $g \in L^2(0,1)$, $g \ge 0$ と $K \ge 0$ に対し，

$$g^{(K)}(x) = \begin{cases} K, & g(x) \ge K\text{の時}, \\ g(x), & 0 \le g(x) < K\text{の時}, \end{cases}$$

とおく．この時，すべての $K \ge 0$ について，$f_n^{(K)}(x) \to f^{(K)}(x)$, a.e. である．よって，Lebesgue の収束定理（有界収束定理）より，$\int_X f_n^{(K)}(x)\,dx \to \int_X f^{(K)}(x)\,dx$ である．また，$\mu(X) = 1$ を使って，Cauchy-Schwarz の不等式より，

$$0 \le \int_X f_n^{(K)}(x)\,dx \le \|f_n^{(K)}\|_2 \le 1$$

だから，$0 \le \int_X f^{(K)}(x)\,dx \le 1$ である．ここで，$K \to 0$ とすれば，単調増大に $f^{(K)}(x) \to f(x)$ だから，単調収束定理より，$\displaystyle\int_X f(x)\,dx \le 1$ となり，$f(x)$ は可積分である．

一般に $g \in L^2(0,1)$, $g \ge 0$, $\|g\|_2 \le 1$ とし，また $K > 0$ とする．この時，$E = E(g \ge K)$ とおけば，$K^2\mu(E) \le \|g\|_2^2 \le 1$ だから，Cauchy-Schwarz の不等式を使って，

$$0 \le \int_X (g(x) - g^{(K)}(x))\,dx \le \int_X \chi_E(x)g(x)\,dx \le \|\chi_E\|_2\|g\|_2 = \sqrt{\mu(E)} \le \frac{1}{K}$$

となる．

これより，

$$\int_X f_n^{(K)}(x)\,dx \le \int_X f_n(x)\,dx \le \int_X f_n^{(K)}(x)\,dx + \frac{1}{K}$$

を得るので，$\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,dx \le \int_X f^{(K)}(x)\,dx + \frac{1}{K}$ となる．ここで，$K \to \infty$ として単調収束定理を用いて，$\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,dx \le \int_X f(x)\,dx$ を得る．同様に，$\displaystyle\int_X f(x)\,dx \le \varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,dx$ を得るので，結局 $\displaystyle\int_X f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,dx$ を得る．

まあ，これは確かに難しいんですが，いろいろと重要な基本事項を組み合わせて使っているのでよく復習しておいてください．