解析学 IV 小テスト No. 12 の簡単な解説

1996 年 7 月 16 日
河東泰之

[1] 積分記号下の微分を普通にやればよい.

[2] やはり積分記号下の微分ですが, 直接仮定が使える形になっていないので評価が必要です.

Kとして z_0中心, 半径 $2r > 0$ の閉円板を取り, これに対応する $g(t)$ を取る. z_0中心, 半径 rの開円板に zが入っているとき, zを中心とする半径 rの演習を Cとすれば,

$$|f_z(t,z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\right| \le \frac{g(t)}{r}$$

となるので, 通常の積分記号下での微分に持ち込めて, Cauchy-Riemann 方程式がチェックできる.

[3] 各整数 n について, $E_n = E(n \le f < n+1)$ とおくと, 条件よりある一つの n_0 以外の n については$\mu(E_n) = 0$ となる. この n_0について, $E_{11} = E(n \le f < n+1/2)$, $E_{12} = E(n+1/2 \le f < n+1)$ とおけば, どちらか片方についてだけ測度が真に正となる. 今$\mu(E_{11}) > 0$ とし, さらに, $E_{21} = E(n \le f < n+1/4)$, $E_{22} = E(n+1/4 \le f < n+1/2)$ とおけば, 再びどちらか片方についてだけ測度が真に正となる. 以下同様に, E_{n1}, E_{n2}を作っていけば, 区間縮小法により, 次々半分になっていく区間に共通の実数 c が一つだけあるので, その c について, $f(x) = c$ a.e. となる.

配点は 1 番から順に, 40, 30, 30 点です. 最高点は 100 点（1 人）, 平均点は 35.8 点でした.