解析学 IV 小テスト No. 12

7/2/1996
河東泰之

自分のノートを参照してよい.（本などは見ないこと.）

[1] $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の可測関数で，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}}(1+x^2)|f(x)|\ dx < \infty$ を満たすとする．この時，$\displaystyle\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$ とおけば，$\hat{f}(\xi)$ はξで 2 回連続微分可能であることを示せ．ただし，ξは実数である．

[2] $f(t,z)$ を $t \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$ の関数として，次の条件が満たされているとする．
(1) 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対し，$f(t,z)$ は，$\mathbf{R}$ 上 t について Lebesgue 可積分.
(2) ほとんどすべての $t \in \mathbf{R}$ に対し，$f(t,z)$ は $\mathbf{C}$ 上 zの正則関数.
(3) $\mathbf{C}$ 内の任意の compact 集合 Kについて，関数 $g(t)$ が次の条件を満たすように取れる．

$$|f(t,z)| \le g(t), \quad (t \in \mathbf{R}, z \in K), \qquad \int_{\mathbf{R}} g(t)\,dt < \infty.$$

この時，$\displaystyle F(z) = \int_{\mathbf{R}} f(t,z)\,dt$ は，$z \in \mathbf{C}$ の正則関数であって，$\displaystyle F'(z) = \int_{\mathbf{R}} f_z(t,z)\,dt$ であることを示せ．ただしここで，$f_z(t,z)$ は $f(t,z)$ を zで微分したものである．

[3] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$\mu(X) > 0$ とし，さらに $T : X \to X$を次の 3 条件を満たす全単射とする．
(1) $A \subset X$が $A \in \mathcal{B}$を満たせば，$TA \in \mathcal{B}$, $T^{-1}A \in \mathcal{B}$.
(2) $A \in \mathcal{B}$について，$\mu(A) = \mu(TA)$.
(3) $A \in \mathcal{B}$が，$\mu(A \cap (TA)^c) = \mu(A^c \cap TA) = 0$ を満たせば，$\mu(A) = 0$ または，$\mu(A^c) = 0$ である.

さらに，$f(x)$ を X上の実数値可測関数とするとき，$f(x) = f(Tx)$ a.e. であれば，ある定数 $c \in \mathbf{R}$ が，$f(x) = c$ a.e. となるように取れることを示せ．

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．