解析学 IV 小テスト No. 10 の簡単な解説

1996 年 6 月 25 日
河東泰之

[3] はともかく，[1], [2] はとても基本的な問題のつもりだったんですが，ちっともできていませんでした．

[1] これは授業でやったものとそっくりの問題です．
積分記号下での微分が正当化できて，Cauchy-Riemann 方程式が成り立つことがわかる．

[2] これも，もろに Lebesgue の収束定理が使える形をしています．
$|f_n(x) - f(x)|^p \le (|f_n(x)| + |f(x)|)^p \le 2^p g(x)^p$ で，$g(x)^p$は可積分だから，Lebesgue の収束定理が使える．

[3] 左側の不等式は明らか．(これは，Fatou の lemma なんかではありません．)
右側については，まず $g_n(x) = \max_{1\le j\le n} f_j(x)$ とおく．次に，$E_j = E(g_n = f_j) \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{j-1})$ とおくと，Eは E_jたちの disjoint union になっている．すると，

$$\int_E g_n(x)\,d\mu = \sum_j \int_{E_j} f_j(x)\,d\mu \le \sum_j \mu(E_j) = \mu(E)$$

がわかる．
$g_n(x)$ は正値で単調増大だから，$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ と Beppo Levi の定理によって，$\int_E f(x)\,d\mu \le \mu(E)$ がわかる．

配点は 1 番から順に，35, 35, 30 点です．最高点は 80 点（2 人），平均点は 30.8 点でした．

演習の成績の付け方について質問が出たので，答えます．まず,（悪いほうから 2 回分を除いた）平均でつけるんですが，その平均点と成績（A〜D）の対応はまだ決めていません．現在までのデータをふまえて言えば，例えば，70 点以上が A，45 点〜69 点が B，20 点〜44 点が C，20 点未満が D といったところです．(これはあくまで現時点における一つの案です．) 7 月 16 日に最後の小テストをした後，補講の時にこの平均点とそれに基づく仮の成績を付けて返します．そして，期末試験の成績がこの仮の成績よりずっとよければ，プラスアルファがついたものが最終成績になります．何が「ずっとよい」かは主観的なものですが，過去の例だとこれが適用される人は 5 人くらいのオーダーでしょう．