解析学 IV 小テスト No. 10

6/18/1996
河東泰之

自分のノートを参照してよい.（本などは見ないこと.）

[1] $f(\xi)$ を $(0,\infty)$ 上の有界可測関数とする．$H=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}\, z>0\}$ とおき，$z\in H$の時，$F(z)=\displaystyle\int_0^\infty f(\xi)e^{i\xi z}\,d\xi$とおく．この積分の値が複素数値で定まり，$F(z)$ が H上正則となることを示せ.（使う定理，その定理が使える根拠をはっきりと述べること.）

[2] $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．この上の可測関数 $f_n(x), g(x)$, $(n=1,2,\dots)$ があって X上 $|f_n(x)|\le g(x)$ を満たし，またすべての $x\in X$で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとし，この極限を $f(x)$ とおく．もしある $p>0$ について$\displaystyle\int_X g(x)^p\,d\mu<\infty$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n(x)-f(x)|^p\,d\mu=0$ であることを証明せよ.

[3] $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．X上の正値可測関数の列 $\{f_n(x)\}_n$があり，すべての $E\in\mathcal{B}$ について，$\displaystyle\sup_n\int_E f_n(x)\,d\mu\le\mu(E)$ と仮定する．この時，$f(x)=\displaystyle\sup_n f_n(x)$ とおけば，すべての $E\in\mathcal{B}$について，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\,d\mu\le\int_E f(x)\,d\mu\le\mu(E)$$

であることを示せ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです.