解析学 IV 小テスト No. 9 の簡単な解説

1996 年 6 月 18 日
河東泰之

[1] 授業で言ったように，これらは $\boxed{\text{絶対に}}$ おぼえておくべき基本定理です．できなかった人は $\boxed{\text{必ず}}$ きちんとおぼえてください．これらをおぼえていない人に単位を出すつもりはありません．

Beppo Levi の定理で $f_n \geq 0$ というのを忘れている人が何人かいましたが，これを落とすと授業で言ったとおり定理が不成立になります．Fatou の lemma で逆向きの不等式を書いている人が結構いましたが,「不等式の向きを忘れたときは例で考えればすぐわかる」と授業で言ったとおりです．また，Lebesgue の収束定理では $f_n(x)$ の極限が存在する，というのは仮定の一部です．はっきり書いて下さい．

また，授業のように「黙って関数を書けば可測関数のことだ」というような取り決めはありますが，このように改まって「定理を書け」というからには「可測関数」ということも断って欲しいものです.（これについては減点はしていません.）

基本的に，この問題は厳しくつけました.

[2] $f(Tx)$ の可測性はすぐ解る．$f \geq 0$ として一般性を失わない．f_nを fに下から単調増大に収束する単関数列とする．この時，$f_n(Tx)$ は，$f(Tx)$ に下から単調増大に収束する単関数列となる．そこで，$\displaystyle\int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f_n(Tx)\, d\mu$が，$\mu(A) = \mu(TA)$ よりわかるので，limit を取って，$\displaystyle\int_X f(x)\, d\mu = \int_X f(Tx)\, d\mu$を得る．可積分性もこれより O.K.

[3] この時，$f_\varepsilon(x) = \varepsilon\chi_{E_\varepsilon}(x)$ とおけば，これは可測関数で $0 \leq f_\varepsilon \leq |f|$ を満たす．仮定より，$|f|$ は可積分で，また各点 $x \in X$で，$\varepsilon \to 0+$の時，$f_\varepsilon(x) \to 0$ であるから，Lebesgue の収束定理より，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\mu(E_\varepsilon) = \int_X \lim_{\varepsilon\to 0+} f_\varepsilon(x)\, d\mu = 0$ を得る.

[4] $g(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の任意の可積分関数とすると，授業でやった定理より，$\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数で，ある有界集合の外で 0 になるようなものの列 $\{g_n(x)\}_n$が，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |g(x) - g_n(x)|\, dx \to 0$ となるように取れる.

この時,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{R}} f(x)g(x) - f(x)g_n(x)\, dx\right| &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(x)||g(x) - g_n(x)|\, dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \int_{\mathbf{R}} |g(x) - g_n(x)|\, dx \to 0\end{aligned}$$

を得るので，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\ dx = 0$ である．特に，有界可測集合 E上で $f(x)$ を考え，$A \subset E$ となる可測集合の特性関数χ_Eを $g(x)$ として使えば，前回の [4] と同じパターンで，前々回の [4] に持ち込み，任意の A 上，ほとんどいたるところ $f(x) = 0$ となる．Eは任意だったから，これは $\mathbf{R}$ 上ほとんどいたるところ $f(x) = 0$ であることを意味する．

配点は 1 番から順に，45, 15, 20, 20 点です．[2], [3], [4] ともにまったくできはよくありませんでした．最高点は 100 点（1 人），2 番目は 65 点，平均点は 26.7 点でした．