解析学 IV 小テスト No. 8 の簡単な解説

1996 年 6 月 11 日
河東泰之

[1] 例えば，次のように取る．

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2^{2n+3}}{n}\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right), & \frac{1}{2^{n+1}} \le x \le \frac{3}{2^{n+2}} \text{の時}, \\ -\frac{2^{2n+3}}{n}\left(x - \frac{1}{2^{n}}\right), & \frac{3}{2^{n+2}} \le x \le \frac{1}{2^{n}} \text{の時}, \\ 0, & \text{その他の時}. \end{cases}$$

[2] Beppo Levi の定理（の corollary）によって，

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} |f(x)|\,dx \le C$$

だから，可積分になる．

[3] $f_n(x) \ge 0$ a.e. でないのに Fatou の lemma を使っているのがおかしい．
これができないようでは困ると思いましたが，これはあらかたできていました．

[4] $f(x)$ の虚部 $\mathrm{Im}\, f(x)$ がほとんどいたるところ 0 であることを示す．もしそうでなければ，$A_1 = E(\mathrm{Im}\, f > 0)$, $A_2 = E(\mathrm{Im}\, f < 0)$ とおいた時，$\mu(A_1) > 0$ かまたは$\mu(A_2) > 0$ である．仮定より，$\displaystyle\int_{A_1} \mathrm{Im}\, f(x)\,d\mu = 0$, $\displaystyle\int_{A_2} \mathrm{Im}\, f(x)\,d\mu = 0$ だから，これは前回の [4] に反し，矛盾．

配点は 1 番から順に，30, 20, 20, 30 点です．最高点は 100 点（4 人），平均点は 50.0 点でした．