解析学 IV 小テスト No. 8

6/4/1996
河東泰之

自分のノートを参照してよい.（本などは見ないこと.）

[1] 次の 3 条件をすべて満たす，$[0,1]$ 上の実数値連続関数列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つあげよ.（きちんと説明をつけること.）

(1) すべての $x \in [0,1]$ で，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

(3) すべての n について $|f_n(x)| \le g(x)$ a.e. となるような，$[0,1]$ 上の可積分関数 $g(x)$ は存在しない.

[2] 定数 $C \ge 0$ と $\mathbf{R}$ 上の実数値可測関数 $f(x)$ が，次の条件を満たすとする.

「すべての有界区間 I 上，$\int_I |f(x)|\,dx \le C$ である.」

この時，$f(x)$ は必ず $\mathbf{R}$ 上可積分になるか？理由を付けて答えよ.

[3] 次の論法の誤りを指摘せよ.

$\{f_n(x)\}_n$ を測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の実数値可測関数列で，ほとんどいたるところ，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するものとし，この極限を $f(x)$ とおく.（極限値が存在しない点 x では $f(x) = 0$ とおく.）この時，Fatou の lemma により，

$$\int_X f(x)\,dx = \int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \le \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx$$

であるが，一方，関数列 $\{-f_n(x)\}_n$ に対して Fatou の lemma を適用して，

$$-\int_X f(x)\,dx = \int_X \varliminf_{n\to\infty} -f_n(x)\,dx \le \varliminf_{n\to\infty} -\int_X f_n(x)\,dx,$$

すなわち

$$-\int_X f(x)\,dx \le -\varlimsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx$$

を得る．これと最初の不等式と合わせて，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx \le \int_X f(x)\,dx \le \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx$$

を得る．つまり，$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx$ である.

[4] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$f(x)$ を X上の複素数値可測可積分関数とする．すべての $A \in \mathcal{B}$について，$\displaystyle\int_A f(x)\ d\mu$ が実数であれば，$f(x)$ はほとんどいたるところ実数値を取ることを示せ．

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．