解析学 IV 小テスト No. 7 の簡単な解説

1996 年 6 月 4 日
河東泰之

[1] 例えば，$A \subset X$に対し，

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty, & A \neq \varnothing \text{の時}, \\ 0, & A = \varnothing \text{の時}, \end{cases}$$

とおけば，可積分なのは定数関数 0 だけなので一番簡単．

各点で測度 0 というような置き方がありましたが，この問題ではほとんどいたるところ一致する関数を同一視してはいません．($L^1(X)$ の話を知っている人はそういう風に考えたくなるでしょうが，残念でした.）

[2] 下から適当な単関数で近似すれば簡単にできます．

[3] a_nを a_n^+と a_n^-に分けて考えればいいので，$a_n \geq 0$ としてよい．このときは，正の項からなる級数はどのような順序で足しても和が不変だということを使って，積分の定義に戻って考えれば同値性がわかる．(答案ではもっと詳しく書かないともちろん減点です.）

[4] 各 $n \in \mathbf{N}$ について，$X_n = E(f > 1/n)$ とおくと，ある n について$\mu(X_n) > 0$ となる．そのような X_n について，

$$\int_X f(x)\ d\mu \geq \int_{X_n} f(x)\ d\mu \geq \mu(X_n)\frac{1}{n} > 0$$

となる．

または，$\int_X f(x)\ d\mu = 0$ と仮定して積分の定義に戻って考えてもよい．すると，下からの単関数による近似が常に 0 なので，ほとんどいたるところ $f(x) = 0$ となって仮定に矛盾する．

$X_0 = E(f > 0)$ とおくと，$\mu(X_0) = \mu(X) > 0$ だから,「明らかに」$\displaystyle\int_{X_0} f(x)\ d\mu > 0$ というのがたくさんありましたが，これを証明することがこの問題のポイントです．少しも明らかなことではありません．(明らかなのは$\displaystyle\int_{X_0} f(x)\ d\mu \geq 0$ です.）

配点は各問 25 点です．最高点は 100 点（3 人），平均点は 45.5 点でした．

小テストは全 14 回ですが，これまででちょうど半分すみました．ここまでの平均点が青で右上に書いてあります．(欠席の回は 0 点として計算してあります．最後の平均を出すときには，予告通り，悪いほうから 2 回分は除いて残り 12 回で平均します.）その平均点の平均点は，29.8 点，分布は下のとおりです．

0–9 (点)	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–
14(人)	7	4	3	3	3	4	3	2