解析学 IV 小テスト No. 6 の簡単な解説

1996 年 5 月 28 日
河東泰之

[1] 例えば

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q} \text{ の時}, \\ 1, & x \notin \mathbf{Q} \text{ の時}, \end{cases}$$

とすればよい.（もちろん，ほかにもいくらでも例はあります.）

[2] まず，授業でやったことより，$|f(x)| = ((\mathrm{Re}\ f(x))^2 + (\mathrm{Im}\ f(x))^2)^{1/2}$ は可測になる．次に，

$$h(x) = \begin{cases} f(x)/|f(x)|, & f(x) \neq 0 \text{ の時}, \\ 1, & f(x) = 0 \text{ の時}, \end{cases}$$

とおけばよい.（$X_0 = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ と，$X_1 = X_0^c$に分けて考えれば，X_1上，$|f(x)|^{-1}$ と $f(x)$ が可測であることより，$h(x)$ は可測．$X_0 \in \mathcal{B}$ で，この上では明らかに $h(x)$ は可測なので大丈夫.）

$f(x) = 0$ の時のことを気にしていないのは，かなりの減点です.

[3] $a \in \mathbf{R}$ に対し，$A_1 = E(f < a)$, $A_2 = E(g < a)$, $A_3 = E(f < a) \cap E(g \geq a)$, $A_4 = E(f \geq a) \cap E(g < a)$, $A_5 = E(f \neq g)$ とおく．すると，$A_2 = (A_1 \setminus A_3) \cap A_4$である．一方，$A_3, A_4 \subset A_5$で$\mu(A_5) = 0$ だから，A_3, A_4は可測である．A_1は仮定より可測だから，A_2も可測になる.

[4] 例えば，$[n, n+1)$, $(n \in \mathbf{Z})$ の形の半開区間のいくつかの（有限でも無限でも）合併全体を $\mathcal{B}$とおけばよい.（この時，$\mathcal{B}$に関する可測関数は，各 $[n, n+1)$ 上で定数になる.）

配点は各問 25 点です．最高点は 100 点（2 人），平均点は 34.6 点でした.

これまでの，小テストの問題，解説のファイルは，http://www.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nyasu/ で取れます.