解析学 IV 小テスト No. 5 の簡単な解説

1996 年 5 月 21 日
河東泰之

[1] $A_n = \{x \in X \mid f_n(x) < 0\}$ とおけば，$\mu(A_n) = 0$ なので，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$とおいて $\mu(A) = 0$ を得る．

[2] まず，$n \in \mathbf{N}$ に対し，$A_n = \{(x, y) \mid -n \le x \le n, 0 \le y \le f(x)\}$ とおく．そして，$\mu(A) = \displaystyle\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$ であることをまず示す.（例えば，$[-n, n]$ を区間に分割し，各区間で sup, inf を考えることにより，A_nを上下からはさんだ後，区間の幅を 0 に近づける．何も書かずに「明らか」などとしたのは減点です.）そして，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$であることを用いて $n \to \infty$ とすればよい.

[3] いろいろなやり方がありますが，一つだけあげます.

$(0, 1)$ 内の有理数に番号を付け，$\{p_n\}_n$とする．$\delta > 0$ に対し，

$$U_\delta = [0, 1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n - \delta/2^n, p_n + \delta/2^n)$$

とおけば，これは $[0, 1]$ の稠密な開集合で，$\mu(U_\delta) \le 2\delta$である．$\mu(U_\delta)$ はδの連続関数であることが示せて，また$\delta \to 0$ の時，$\mu(U_\delta) \to 0$ であり，十分大きいδについて$\mu(U_\delta) = 1$ だから，どこかで$\mu(U_\delta)\varepsilon$となるδが存在する.

配点は 1 番から順に，30, 40, 30 点です．最高点は 85 点，平均点は 37.1 点でした.