解析学 IV 小テスト No. 6

1996 年 5 月 21 日
河東泰之

自分のノートを参照してよい．（本などは見ないこと．）[1], [3] でいう $\mathbf{R}$ 上の可測関数とは，$\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可測集合に関するものである．

[1] $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への可測関数 $f(x)$ で，すべての点で不連続であるものの例を一つあげよ．

[2] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．$f(x)$ を X 上の複素数値可測関数とする．この時，$f(x) = |f(x)|h(x)$, $|h(x)| = 1$ となる可測関数 $h(x)$ が存在することを示せ．

[3] $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値可測関数とする．$g(x)$ も $\mathbf{R}$ 上の実数値関数で，$f(x) = g(x)$ a.e. であるとき，$g(x)$ も可測関数であることを示せ．

[4] 次の 2 条件を同時に満たす $\mathbf{R}$ 上の完全加法族 $\mathcal{B}$ の例を一つあげよ．
(1) $\mathcal{B}$ は無限集合．
(2) $\mathbf{R}$ 上の実数値関数 $f(x)$ が $\mathcal{B}$ について可測であれば，$f(x)$ の値域はたかだか可算．

[1], [4] はきちんと説明をつけること．
解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．