解析学 IV 小テスト No. 1

1996 年 4 月 16 日
河東泰之

自分のノートを参照してよい.（ただし，本は見ないこと.）

[1] 次の条件すべてを満たすような，$[0,1]$ 上の実数値連続関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ の例を一つあげよ.（その列が本当に下記の条件を満たしていることをきちんと説明すること.）

(1) $f_n(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$.

(2) すべての $x \in [0,1]$ について， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \infty$.

[2] $f(x)$ を有界閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数とする.

(1) Riemann 積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ の定義を述べよ.

(2) 上の定義は，極限を含んでいるが，その極限値の存在を証明せよ.

[3] 有界閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数全体を X とおき，$f, g \in X$ に対し，$d(f,g) = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ とおく.

(1) d は X 上の距離を定めることを示せ.

(2) X は距離 d について完備であることを示せ.

解答は別紙に書いて下さい．解答用紙の裏面を使用してもけっこうです．[2], [3] は事実自体はよく知られたことですから,「授業で習った定理から明らか」などとしないで，きちんと証明を書いてください.