2016 年解析学特別演習 I テスト (5)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.

このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください.

[1] f を測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可測関数で，$[0, \infty) \cup \{\infty\}$ に値を持つものとし，さらに可積分であるとする.

(1) 実数 c に対し $X_c = \{x \in X \mid f(x) > c\}$ とおく．$\displaystyle\lim_{c\to\infty} \int_{X_c} f \, d\mu = 0$ を示せ.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) < \delta$ ならば $\displaystyle\int_E f \, d\mu < \varepsilon$ となることを示せ.

[2] $\mathbb{R}$ 上で Lebesgue 測度を考える．次の条件すべてを満たす Lebesgue 可測関数列 $\{f_k\}_k$ の例を挙げよ．条件を満たしていることをきちんと説明すること.

(1) すべての k について $0 \le f_k(x) < \infty$.

(2) どの $x \in \mathbb{R}$ についても $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ は存在しない.

(3) $\displaystyle\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dx > \int_{\mathbb{R}} (\liminf_{k\to\infty} f_k(x)) \, dx$.

[3] $\mathbb{R}$ 上で Lebesgue 測度を考える．次の条件すべてを満たす Lebesgue 可測関数列 $\{f_k\}_k$ の例を挙げよ．条件を満たしていることをきちんと説明すること.

(1) すべての k について $0 \le f_k(x) < \infty$.

(2) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$.

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dx = 0$.

(4) $g(x) = \sup_k f_k(x)$ とおくと $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu = \infty$.

[4] $f_k(x), f(x)$, $(k = 1, 2, \dots)$, は，測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可測関数で，X 上 $0 \le f_k(x) \le f(x) \le \infty$ を満たすものとする．このとき，すべての $x \in X$ に対し，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ であれば

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

であることを示せ.