2016 年解析学特別演習 I テスト (4) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各問 20 点です．平均点は 67 点，最高点は 100 点 (7 人) でした．

[1] いくらでもありますが，たとえば $g(x) = \max(1-|x|, 0)$ とおいて，$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kg(k^3(x-k))$ とおけばできます．

[2] $E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le f(x) < 1\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$, $E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\}$ とおきます．$n \to \infty$ のとき，Lebesgue の収束定理により，$\displaystyle\int_{E_1} f(x)^n \, dx \to 0$ となり，また $\displaystyle\int_{E_2} f(x)^n \, dx \to \mu(E_2) < \infty$ であり，単調収束定理により $\displaystyle\int_{E_3} f(x)^n \, dx \to \infty \times \mu(E_3)$ となります．よって求める必要十分条件は $f(x) \le 1$ a.e. であり，答えは $\mu(E_2)$ です．

[3] $\varepsilon\chi_{E_\varepsilon}(x) \le |f(x)|$ であることと，$\varepsilon \to 0+$ のとき，$\varepsilon\chi_{E_\varepsilon}(x) \to 0$ であることから，Lebesgue の収束定理が使えて

$$\int_X \varepsilon\chi_{E_\varepsilon}(x) \, d\mu = \varepsilon\mu(E_\varepsilon) \to 0$$

を得ます．

[4] $x > 0$ のとき $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ は単調増大で e^x に収束します．よって $(0, \infty)$ 上で $\chi_{(0,n)}(x)\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ は単調増大で e^{-x} に収束します．したがって答えは $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1$ です．

[5] (1) 普通に積分して $\dfrac{1}{2m-1} - \dfrac{1}{2m}$ です．

(2) まずこれは交代級数で $\dfrac{1}{n}$ は単調減少で 0 に収束するので和は収束します．さらにこの和は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$ に等しくなります．(1) よりこれは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty (e^{-(2n-1)x} - e^{-2nx}) \, dx$$

に等しく，これは単調収束定理より

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty (e^{-(2n-1)x} - e^{-2nx})\, dx$$

に等しくなります．この積分の中の無限和は普通に和が取れて，$\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ となります．よって上記の積分は

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx = [-\log(1+e^{-x})]_0^\infty = \log 2$$

となります．