2016 年解析学特別演習 I テスト (3) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各問 25 点です．平均点は 45 点，最高点は 100 点 (1 人) でした．

[1] まず，測度 0 の集合上で値を変えても答えに影響しないので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\chi_{(k,k+1]}(x)$ を考えても同じです．このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k(k+1)}\chi_{(k,k+1]}(x)$ が $m\to\infty$ としたとき，元の関数に単調増大で収束する単関数の列なので，この積分を考えて $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{m}{m+1}$ となり，ここで $m\to\infty$ として答えは 1 です．

[2] まず

$$f_{11}(x)=\frac{1}{2^2}\chi_{(1,2]}(x), f_{12}(x)=\frac{1}{3^2}\chi_{(2,3]}(x), f_{13}(x)=\frac{1}{4^2}\chi_{(3,4]}(x),\ldots$$

とおき，次に

$$f_{21}(x)=\left(\frac{2^2}{3^2}-\frac{1}{2^2}\right)\chi_{(1,3/2]}(x), f_{22}(x)=\left(\frac{2^2}{5^2}-\frac{1}{3^2}\right)\chi_{(2,5/2]}(x), f_{23}(x)=\left(\frac{2^2}{7^2}-\frac{1}{4^2}\right)\chi_{(3,7/2]}(x),\ldots$$

とおきます．さらに

$$f_{31}(x)=\left(\frac{4^2}{5^2}-\frac{2^2}{3^2}\right)\chi_{(1,5/4]}(x), f_{32}(x)=\left(\frac{4^2}{7^2}-\frac{1}{2^2}\right)\chi_{(3/2,7/4]}(x), f_{33}(x)=\left(\frac{4^2}{9^2}-\frac{2^2}{5^2}\right)\chi_{(2,9/4]}(x),\ldots$$

に続けて

$$f_{41}(x)=\left(\frac{8^2}{9^2}-\frac{4^2}{5^2}\right)\chi_{(1,9/8]}(x), f_{42}(x)=\left(\frac{8^2}{11^2}-\frac{2^2}{3^2}\right)\chi_{(5/4,11/8]}(x), f_{43}(x)=\left(\frac{8^2}{13^2}-\frac{4^2}{7^2}\right)\chi_{(3/2,13/8]}(x),\ldots$$

とし，以下同様に続けます．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f_{km}(x)$ は単関数の和で，$(1,\infty)$ 上で $\dfrac{1}{x^2}$ に等しくなります．よって求める積分は，これらの単関数の積分の和で求められます．和を取る順序を変えて

$$f_{11}(x)+f_{21}(x)+f_{31}(x)+f_{32}(x)+f_{41}(x)+f_{42}(x)+f_{43}(x)+f_{44}(x)+\cdots$$

とすると，これらの積分の和は授業でやったことにより Riemann 積分 $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}$ となります．同様に区間 $(n,n+1]$ 内で関数 $f_{km}(x)$ を足すことにより，Riemann 積

分 $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{n(n+1)}$ を得るので，すべての n について和を取ることによって答えは 1 となります．

(5/9 の授業でやった単調収束定理を使えば議論がもっと簡単になります．)

[3] たとえば $\displaystyle f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\chi_{(k-1,k]}(x)$ とおけば，交代級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ が収束することと，$c \in (k-1,k]$ のとき $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ は $\displaystyle\int_0^{k-1} f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_0^k f(x)\,dx$ の間に等号付きで挟まれていることから，$\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_0^c f(x)\,dx$ が有限実数値として存在することが分かります．一方，$\displaystyle f_+(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\chi_{(2k-2,2k-1]}(x)$ であることからこの積分は [1] のように考えて $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = \infty$ となるので $f(x)$ は Lebesgue 可積分ではありません．

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ などとしても同様です．

[4] $\mathbb{R}$ の測度は無限大なので授業でやった論法はそのままでは使えません．

自然数 m について $[-m,m]$ 上で関数列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ を考え，授業でやったようにして正の数列 $c_{m1}, c_{m2}, \ldots$ を，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_{mk} f_k(x)$ が $[-m,m]$ 上ほとんどいたるところ収束するように取ります．次に $c_k = \min(c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{kk})$ とおくと，これは正の数列で，各 $[-m,m]$ 上では $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} c_{mk} f_k(x)$ がほとんどいたるところ収束していることから，$\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} c_k f_k(x)$ がほとんどいたるところ収束します．よって $\mathbb{R}$ 上で $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$ がほとんどいたるところ収束します．