2016 年解析学特別演習 I テスト (2) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] 20 点, [2] 20 点, [3] 30 点, [4] 30 点です．平均点は 68 点，最高点は 100 点 (14 人) でした．

[1] 例はたくさんありますが，たとえば $E_{2k} = [0,1]$, $E_{2k+1} = \varnothing$ とおけばできます．

[2] 任意の自然数 m, n について $\bigcap_{k=m}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ なので，

$$\liminf_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} E_k \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \limsup_{k\to\infty} E_k$$

が成り立ちます

[3] $[0,1]\times[0,1]$ から 1/3 ずつ抜いていくことにより，授業中の Cantor 集合の測度の計算と同様にして，$\mu(E\times[0,1]) = 0$ がわかります．同様に $\mu(E\times[k,k+1]) = 0$ となるので k について和を取って，$\mu(E\times\mathbb{R}) = 0$ を得ます．

[4] U 内の，x, y 座標がともに有理数の点に番号をつけて $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), \dots$ とします．$\mu(U) < \infty$ なので，$0 < \varepsilon < \sqrt{3\mu(U)}/2$ となる ε を任意にとります．このとき $U_k = ((x_k - \varepsilon/2^k, x_k + \varepsilon/2^k)\times(y_k - \varepsilon/2^k, y_k + \varepsilon/2^k)) \cap U$ とおいて $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ とおくと，これは U の稠密な開部分集合で，$\mu(E) \le 4\varepsilon^2/3$ です．さらに正の実数 r に対し，$E_r = (E \cup (-r,r)\times(-r,r)) \cap U$ とおくと，これは U の稠密な開集合で，r を正の実数の範囲で動かしたとき，E_r の Lebesgue 測度の取る値は区間 $(4\varepsilon^2/3, \mu(U)]$ 全体を覆います．ε はいくらでも小さく取れる一方，測度の値は 0 を取らないので，答えは $(0, \mu(U)]$ です．