2016 年解析学 IV 追試

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

**問題用紙は 2 枚あります．**

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．

このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です．

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙に収まるように書いてください．

[1] [1] 次のすべての条件を満たす $\mathbb{R}$ 上の連続関数の列の例を挙げよ．

(1) $0 \leq f_k(x) \leq 1$.

(2) すべての $x$ について $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$.

(3) $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx = 0$.

(4) すべての $k$ について $\sup_{m\geq k} f_m(x)$ は可積分ではない．

[2] $[0,1]$ 上の Lebesgue 可測関数列 $\{f_k(x)\}_k$ が，すべての $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $[0,1]$ 上 $f_k(x) \geq 0$ a.e. を満たしているとする．次のすべての条件を満たす $[0,1]$ の Lebesgue 可測部分集合の列 $\{E_k\}_k$ と正の実数の列 $\{c_k\}_k$ が存在することを示せ．ただし $\mu$ は Lebesgue 測度を表す．

(1) $\mu(E_k) > 1 - 1/2^k$.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{E_k} f_k\, d\mu < \infty$.

[3] $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ とする．$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して定義された関数

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{t-z}\, dt$$

は，$z$ の正則関数であることを示せ．

[4] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の複素数値有界連続関数とする．

$$\lim_{k\to\infty} k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-k^2x^2}\, dx$$

を求めよ．

[5] $x \in \mathbb{R}$ に対し，$f(x) = e^{-x^2}$ とおく．$f * f * f(x)$ を求めよ．

[6] 次のすべての条件を満たす $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ の例を挙げよ．
(1) $f(x)$ は連続である．
(2) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $0 \leq f(x) < \infty$.
(3) すべての $p \in [1, \infty)$ に対し $f \in L^p(\mathbb{R})$.
(4) $f \notin L^\infty(\mathbb{R})$.