2016 年解析学 IV 期末テスト解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に，15 点，10 点 ×2，15 点，20 点，15 点，15 点です．100 点満点で平均点は 63 点，最高点は 100 点 (6 人) でした．得点分布は以下の通りです．

0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
1(人)	3	3	6	3	1	6	9	6	6	6	50

この得点と成績が赤字で書いてあります．成績は 100 点が A+(6 人), 80 点以上が A(12 人), 60 点以上が B(15 人), 40 点以上が C(4 人), それ未満が D(13 人) です．

演習の成績 (悪い 2 回分を除いた平均) は，平均点は 44 点，最高点は 100 点 (1 人) でした．得点分布は以下の通りです．

0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
2(人)	3	5	2	4	8	12	5	5	1	1	48

こちらの成績が青字で書いてあります．成績は 91 点以上が A+(1 人), 68 点以上が A(13 人), 50 点以上が B(19 人), 30 点以上が C(6 人), それ未満が D(9 人) です．ただし期末試験の成績が特に良かった人は，本来より良い成績がついています．

演習の単位だけを落として，その単位が欲しい人は講義の方の追試を受けてください．

[1] たとえば $f_k(x) = \chi_{[k,k+1/k]}(x)$ が一つの例です．

ほかにも $f_k(x) = \dfrac{\chi_{[k,k+1]}(x)}{x}$ などたくさんあります．

[2] (1) 数列 $1, c, c^2, c^3, \ldots$ の任意の部分数列の和に書ける実数の全体の集合を E' とおき，E' の Lebesgue 外測度が 0 であることを示せば十分です．Lebesgue 外測度を μ^* で表します．

まず和としてできる実数の範囲は $[0, 1/(1-c)]$ に収まっています．最初に 1 を使わないと，和としてできる実数の範囲は $[0, c/(1-c)]$ の範囲に収まり，最初に 1 を使うと，和としてできる実数の範囲は $[1, 1/(1-c)]$ の範囲に収まります．今仮定より $c/(1-c) < 1$ なので，最初の区間 $[0, 1/(1-c)]$ のうち，$(c/(1-c), 1)$ の範囲は取りえないことがわかります．これより $\mu^*(E') \le (2c)/(1-c)$ です．次に 2 個目の c を使うか使わないかで場合分けすると，上で残った閉区間 2 つのそれぞれから開区間が除かれます．同様に計算すると $\mu^*(E') \le (2c)^2/(1-c)$ となります．以下同様にして $\mu^*(E') \le (2c)^k/(1-c)$ が導かれるので $\mu^*(E') = 0$ を得ます．

(2) 0 より大きく 2 以下の実数は 2 進小数展開することにより E の元であることがわかります．(有限小数で表せる実数は 1 を無限に並べた無限小数表示を使います．) それ以外の実数は E の元ではないので $E=(0,2]$ であり，測度は 2 です．

[3] $f(x)=0$ のときは $\dfrac{kf(x)}{kf(x)+1}=0$ であり，$f(x)>0$ のときは k について単調増大で $\dfrac{kf(x)}{kf(x)+1}\to 1$ です．よって単調収束定理より，$E=\{x\mid f(x)>0\}$ として求める極限は $\displaystyle\int_E dx=\mu(E)$ です．よって求める条件は $\mu(E)<\infty$ です．

[4] まず $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ は $x\to 0$ のとき有界なので，被積分関数は可積分です．t は有界開区間 (a,b) (ただし $a>0$) を動くとします．被積分関数を t で k 回偏微分すると $-e^{-tx}\dfrac{x-\sin x}{x^{3-k}}$ となりますが，これの絶対値は $t\in(a,b)$ のとき $e^{-ax}\dfrac{|x-\sin x|}{x^{3-k}}$ という t によらない可積分関数で抑えられます．よって積分記号下の微分が何回でもできて，$f(t)$ は t の C^∞ 級関数となります．

「t によらない可積分関数で抑えられる」という条件をチェックしていないものは 0 点です．

[5] 問題の関数は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\chi_E*\chi_E(x)e^{-ixt}\,dx$ です．これを

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\chi_E(x-y)\chi_E(y)e^{-i(x-y)t}e^{-iyt}\,dy\,dx$$

と書くと，被積分関数に絶対値をつけたものを y,x で積分したものは $\mu(E)^2<\infty$ となって可積分なので，Fubini の定理が使えて，上記積分は $f(t)^2$ に等しくなります．

Fubini の定理の使える条件をきちんとチェックしていないものは 0 点です．

[6] $|f|^{3/2},|g|^{3/2}\in L^2(X)$ なので Hölder の定理より，$|f|^{3/2}|g|^{3/2}\in L^1(X)$ となります．つまり，$|f||g|\in L^{3/2}(X)$ となります．$2/3+1/3=1$ より，$|h|\in L^3(X)$ と合わせて再び Hölder の定理より，$|f||g||h|\in L^1(X)$ を得ます．

ほかにも相加相乗平均の不等式を使うなど簡単な方法があります．