2016 年解析学 IV 期末テスト

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.

このテストは，自筆ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙に収まるように書いてください.

[1] 次のすべての条件を満たす $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数の列の例を挙げよ.

(1) $0 \le f_k(x) \le 1$.

(2) すべての x について $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$.

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = 0$.

(4) すべての k について $\displaystyle\sup_{m\ge k} f_m(x)$ は可積分ではない.

[2] (1) $0 < c < 1/2$ とする．数列 $1, c, c^2, c^3, \ldots$ の部分無限数列の和に書ける実数の全体の集合を E とする．E の Lebesgue 測度は 0 であることを示せ.

(2) $c = 1/2$ とする．数列 $1, c, c^2, c^3, \ldots$ の部分無限数列の和に書ける実数の全体の集合を E とする．E の Lebesgue 測度を求めよ.

[3] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された Lebesgue 可測関数で常に $0 \le f(x) < \infty$ となるものとする．$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{kf(x)}{kf(x)+1}\,dx$ が存在して有限値となるための必要十分条件を求めよ.

[4] 正の実数 t に対して，$\displaystyle f(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{x - \sin x}{x^3}\,dx$ とおく．この範囲で $f(t)$ は t の C^∞ 級関数となることを示せ.

[5] E を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合で，$\mu(E) < \infty$ となるものとし，t を実数とする．(μ は Lebesgue 測度を表す．) $\displaystyle f(t) = \int_E e^{-ixt}\,dx$ とおいたとき，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mu(E\cap(x-E)) e^{-ixt}\,dx$ を $f(t)$ を使って表わせ．ただし $x - E = \{x - y \mid y \in E\}$ である.

[6] $f, g, h \in L^3(X)$ のとき，fgh は可積分であることを示せ.