2016 年解析学特別演習 I テスト (12) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

平均点は 38 点，最高点は 100 点 (1 人) でした．

[1] 普通に計算すると，

$$f*f(x)=\begin{cases}0, & |x|\geq 1 \text{ のとき},\\ x+1, & -1\leq x\leq 0 \text{ のとき},\\ -x+1, & 0\leq x\leq 1 \text{ のとき}\end{cases}$$

となります．さらに続けて計算して，

$$f*f*f(x)=\begin{cases}0, & |x|\geq \dfrac{3}{2} \text{ のとき},\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+x\right)^2, & -\dfrac{3}{2}\leq x\leq -\dfrac{1}{2} \text{ のとき},\\ \dfrac{3}{4}-x^2, & -\dfrac{1}{2}\leq x\leq \dfrac{1}{2} \text{ のとき},\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-x\right)^2, & \dfrac{1}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2} \text{ のとき}\end{cases}$$

となります．

[2] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x-t)^2}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ となるので留数計算します．留数計算の詳細は省略しますが，x 軸に直径が乗り，原点を中心として上半平面にかかる半円周を積分路として，円の半径を無限大にもっていきます．被積分関数は極が 4 つありますが，上記半円の内部にある $t=i, x+i$ での留数が効いてくるので，答えは $\dfrac{2\pi}{x^2+4}$ です．

[3] $f\in L^1(\mathbb{R}), g\in L^2(\mathbb{R})$ で $\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_1=0,\ \lim_{k\to\infty}\|f_k-g\|_2=0$ となるものが存在します．$\{f_k\}_k$ の部分列を取れば f にほとんどいたるところ各点収束しており，さらにその部分列を取れば g にほとんどいたるところ各点収束しています．このことから $f=g$ がわかり，結論が出ます．

[4] f を実部と虚部に分け，さらにそれぞれを 0 以上の値を取る部分と 0 以下の値を取る部分に分けて考えればいいので，$f(x)$ は常に 0 以上の値を取ると仮定してかまいません．

問題の主張を簡単に「$f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ が $g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で同時近似できる」ということにします．

以下の主張を順に示せば結論が出ます．

(1) 0 以上の値を取る $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ は，0 以上の値を取り，ある有界区間の外で 0 となる $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ で同時近似できる．

(2) 0 以上の値を取り，ある有界区間の外で 0 となる $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ は単関数で同時近似できる．

(3) 可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ が有界区間に含まれるとき，$\chi_E(x)$ は $g \in C_0(\mathbb{R})$ で同時近似できる．

(4) $f \in C_0(\mathbb{R})$ は $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で同時近似できる．

以上の主張の証明は次の通りです．

(1) $f_k(x) = f(x)\chi_{[-k,k]}(x)$ とおけば，Lebesgue の収束定理により $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = 0$ なので結論を得ます．

(2) f の通常の単関数による下からの近似列を $\{f_k\}_k$ とおけば，Lebesgue の収束定理により $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = 0$ なので結論を得ます．

(3) $\chi_E(x)$ の授業でやった $C_0(\mathbb{R})$ の元による L^1 ノルムでの近似は，L^2 ノルムによる近似にもなっていることが分かるので結論を得ます．

(4) 授業でやった $f \in C_0(\mathbb{R})$ の元を convolution により $C_0^\infty(\mathbb{R})$ の元で近似する方法は同時近似になっていることが分かるので，結論を得ます．