2016 年解析学特別演習 I テスト (10)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．

このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です．

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．

[1] $f_1, f_2, f_3, \ldots$ を $L^\infty(X)$ の関数列とする．これが L^∞ ノルムについて Cauchy 列であるとき，$\{f_k(x)\}_k$ はほとんどいたるところ収束することを示せ．

[2] $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ とする．$L^1(\mathbb{R})$ の元として $(f * g) * h = f * (g * h)$ であることを示せ．

[3] E を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合，$\mathcal{B}$ を Lebesgue 可測な E の部分集合の全体，μ を Lebesgue 測度の $\mathcal{B}$ への制限として，測度空間 $(E, \mathcal{B}, \mu)$ を考える．$L^2(E) \subset L^1(E)$ となるための必要十分条件を求めよ．

[4] 次の条件を満たす関数列 $f_1, f_2, f_3, \cdots \in \displaystyle\bigcap_{1 \le p \le \infty} L^p(\mathbb{R})$ の例を挙げよ．

(1) $1 \le p < \infty$ のとき $\{f_k\}_k$ は L^p ノルムについて Cauchy 列である．

(2) $\{f_k\}_k$ は L^∞ ノルムについて Cauchy 列ではない．

[5] ある $p \in [1, \infty)$ について $x_1, x_2, x_3, \cdots \in \ell^p$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \|x_k\|_p = 0$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \|x_k\|_\infty = 0$ を示せ．