2016 年解析学特別演習 I テスト (9) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は各問 25 点，平均点は 52 点，最高点は 100 点 (1 人) でした．

[1] 問題の式は $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \chi_A(y-x)\chi_B(y)\ dy\ dx$ と書けます．関数は 0 以上の値を取っているので Fubini の定理が使えて，積分順序を入れ替えれば，$\int_{mathbbR} \chi_A(y-x)\ dx = \mu(A)$ となり，残りの積分から $\mu(B)$ が出るので結論を得ます．

[2] (1) 無限和のように見えますが，実は x または y を固定すれば有限和なので簡単に計算できて，前者の積分は 0，後者は 1 となります．

(2) $|f(x,y)|$ を積分すると 1 が無限回足されて無限大となるので，可積分でありません．

[3] まず，形式的な変形は

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\ dy\right)e^{-ixt}\ dx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)t}e^{-iyt}\ dy\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)t}e^{-iyt}\ dx\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-i(x-y)t}\ dx \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-iyt}\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}\ dx \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ixt}\ dx\end{aligned}$$

です．このうち最後の等式は単に Lebesgue 積分が平行移動で不変だということを使っているだけなので，問題は積分順序を交換している 2 番目の等号です．これは Fubini の定理を使っているわけですが，使える理由は，$|f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)t}e^{-iyt}| = |f(x-y)g(y)|$ に対し，

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\ dx\ dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\ dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\ dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\ dx < \infty$$

であるからです．

[4]

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x}\ dx = \int_0^c \int_0^\infty e^{-xt}\sin x\ dt\ dx$$

であり，$e^{-xt}\sin x$ がこの積分範囲で可積分なので，Fubini の定理が使えます．積分順序を交換して内側の積分を計算すると，2 回部分積分して

$$\int_0^c e^{-xt}\sin x\,dx = \frac{1-e^{-ct}\cos c - te^{-ct}\sin c}{1+t^2}$$

となります．よって求める量は

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^\infty \frac{1-e^{-ct}\cos c - te^{-ct}\sin c}{1+t^2}\,dt$$

となりますが，$c > c_0$ の範囲で動くとき，分子の絶対値は $1+e^{-c_0t}+te^{-c_0t}$ で抑えられるので Lebesgue の収束定理が使えて，答えは $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$ となります．