2016 年解析学特別演習 I テスト (8) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

平均点は 57 点，最高点は 100 点 (1 人) でした．

[1] (1) $0 \le \nu(E) \le \infty$, $\nu(\varnothing) = 0$ はただちにわかり，$E_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ が互いに disjoint なときは，0 がどの $E_k$ にも含まれない場合，どれかの $E_k$ に含まれる場合に分けて考えれば，完全加法性が出ます．

(2) $\nu(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$ なので，$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ のすべての部分集合が可測となります．$\{0\}$ は元から可測なので，結局 $\mathbb{R}$ のすべての部分集合が可測となり，$E \subset \mathbb{R}$ に対し，$0 \in E$ ならば $\bar{\nu}(E) = 1$, $0 \notin E$ ならば $\bar{\nu}(E) = 0$ となります．

[2] (1) $0 \le \nu(E) \le \infty$, $\nu(\varnothing) = 0$ はただちにわかり，完全加法性は単調収束定理から出ます．

(2) $\nu(E) = 0$ とすると $\mu(E) = 0$ です．($\mu$ は Lebesgue 測度．) $A \subset E$ とすると $A$ も Lebesgue 可測なので，$\nu$ は完備です．

[3] $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合族をそれぞれ $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_{n+m}$ とおき，Borel 完全加法族を $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m, \mathcal{B}_{n+m}$ とおきます．

まず
$$\mathcal{B} = \{B \subset \mathbb{R}^n \mid B \times \mathbb{R}^m \in \mathcal{B}_{n+m}\}$$
とおきます．$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{B}$ であり，$\mathcal{B}$ は完全加法族なので，$\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$ となります．すなわち，任意の $B \in \mathcal{B}_n$ に対して $B \times \mathbb{R}^m \in \mathcal{B}_{n+m}$ です．同様にして，任意の $B \in \mathcal{B}_m$ に対して $\mathbb{R}^n \times B \in \mathcal{B}_{n+m}$ です．

次に，
$$\mathcal{B}' = \{B \subset \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } U \in \mathcal{U}_m \text{について } B \times U \in \mathcal{B}_{n+m}\}$$
とおきます．$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{B}'$ であり，また $B^c \times U = \mathbb{R}^n \times U \setminus B \times U$ であることより，$\mathcal{B}'$ は完全加法族です．このことより，$\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'$ です．すなわち，任意の $B \in \mathcal{B}_n$, 任意の $U \in \mathcal{U}_m$ に対して $B \times U \in \mathcal{B}_{n+m}$ です．同様にして，任意の $U \in \mathcal{U}_n$, $B \in \mathcal{B}_m$ に対して $U \times B \in \mathcal{B}_{n+m}$ です．

次に，
$$\mathcal{B}'' = \{B \subset \mathbb{R}^n \mid \text{すべての } E \in \mathcal{B}_m \text{について } B \times E \in \mathcal{B}_{n+m}\}$$
とおきます．$\mathcal{U}_n \subset \mathcal{B}''$ であり，また $B^c \times E = \mathbb{R}^n \times E \setminus B \times E$ であることより，最初に証明したことが使えて $\mathcal{B}''$ は完全加法族です．このことより，$\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}''$ です．すなわち，任意の $B \in \mathcal{B}_n$, 任意の $B' \in \mathcal{B}_m$ に対して $B \times B' \in \mathcal{B}_{n+m}$ です．このことから，$\mathcal{B}_n$ と $\mathcal{B}_m$ の直積完全加法族が $\mathcal{B}_{n+m}$ に含まれることがわかります．

逆に，$U \in \mathcal{U}_{n+m}$ とすると，$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \times W_k$ ($V_k \subset \mathbb{R}^n, W_k \subset \mathbb{R}^m$ はいずれも，中心の座標がすべて有理数で半径も有理数であるような開球) と書けるので，$\mathcal{U}_{n+m}$ は $\mathcal{B}_n$ と $\mathcal{B}_m$ の直積完全加法族に含まれ，$\mathcal{B}_{n+m}$ が $\mathcal{B}_n$ と $\mathcal{B}_m$ の直積完全加法族に含まれることがわかります．

[4] 主張が正しいとすると，Lebesgue 完全加法族 (Lebesgue 可測集合の全体) と Borel 完全加法族が等しいことになります．しかし [3] で見たように 1 次元の Borel 完全加法族 2 つの直積は 2 次元の Borel 完全加法族であり，また授業でやったように 1 次元の Lebesgue 完全加法族の直積は 2 次元の Lebesgue 完全加法族ではないのでこれはありえません．

[5]

$$\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R} \mid E \text{ は Lebesgue 可測}, \int_E f(x)\,dx \geq 0\}$$

とおけばこれは有限個の区間の disjoint union 全体を含む単調族です．(単調減少列については $f$ の可積分性より Lebesgue の収束定理が使えます．) よって $\mathcal{M}$ は有限個の区間の disjoint union 全体を含む最小の完全加法族を含み，したがって Borel 完全加法族を含みます．

任意の Lebesgue 可測集合 $E$ に対し，Borel 集合 $F, G$ で $F \subset E \subset G$, $\mu(G \setminus F) = 0$ となるものがあるので，$\displaystyle\int_E f(x)\,dx = \int_F f(x)\,dx = 0$ となります．

任意の正の整数 $k$ について，$\{x \mid f(x) < -1/k\}$ の Lebesgue 測度が 0 となるので，$f(x) \geq 0$ a.e. となります．