2016 年解析学特別演習 I テスト (8)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください．

このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です．

途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．

[1] $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合全体を $\mathcal{B}$ とし，$E \in \mathcal{B}$ に対し，$0 \in E$ ならば $\nu(E) = 1$, $0 \notin E$ ならば $\nu(E) = 0$ とおく．

(1) ν が測度であることを示せ．

(2) ν を完備化した測度はどのようなものか，記述せよ．

[2] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の常に正の値を取る Lebesgue 可測関数とする．$\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合全体を $\mathcal{B}$ とし，$E \in \mathcal{B}$ に対し，$\nu(E) = \displaystyle\int_E f(x)\,dx$ とおく．

(1) ν が測度であることを示せ．

(2) ν が完備であることを示せ．

[3] $\mathbb{R}^n$ の Borel 完全加法族と $\mathbb{R}^m$ の Borel 完全加法族の直積完全加法族は $\mathbb{R}^{n+m}$ の Borel 完全加法族に等しいことを示せ．

[4] 次の主張は正しくないことを示せ．

すべての n について，$\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 可測集合は Borel 集合 (すなわち Borel 完全加法族の元) である．

[5] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可積分関数とする．任意の区間 I に対し $\displaystyle\int_I f(x)\,dx \geq 0$ であれば，$f(x) \geq 0$ a.e. であることを示せ．