2016 年解析学特別演習 I テスト (7) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

平均点は 37 点，最高点は 95 点 (1 人) でした．積分記号下の微分ができる前提条件をきちんとチェックしていないものは減点です.

[1] x については積分記号下の微分がそのままでき，$\dfrac{\partial F}{\partial x} = \displaystyle\int_0^\infty it^3 f(t)e^{itz}\,dt$ となり，また y による偏微分の場合は y の動く範囲を有界開区間 (a,b) に限定すればやはり積分記号下の微分ができるので，$\dfrac{\partial F}{\partial y} = \displaystyle\int_0^\infty -t^3 f(t)e^{itz}\,dt$ となります．(偏微分した関数を一様に可積分関数で抑えるため，y の方は全体を動かすのではなく，有界な区間に限定する必要があります．) よって Cauchy-Riemann 方程式が成り立ち，また Lebesgue の収束定理により上の二つの偏微分はいずれも連続関数なので F は C^1 級となります．以上合わせて $F(z)$ は正則関数です.

[2] この関数を $f(t)$ とおくと，積分記号下の微分が 2 回できて，$f'(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{ixe^{ixt}}{1+x^2+x^4}\,dx$, $f''(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{-x^2e^{ixt}}{1+x^2+x^4}\,dx$ となります．(被積分関数は絶対値を取るといずれも t に無関係な可積分関数です．) また Lebesgue の収束定理により $f''(t)$ は連続なので，$f(t)$ は C^2 級であることがわかります.

[3] $f*g$ がコンパクト台であることは授業でやったのと同じ方法で示せます.

置換積分により，$f*g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty g(x-y)f(y)\,dy$ なので，積分記号下の微分が何回でもできて，$(f*g)^{(n)} = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty g^{(n)}(x-y)f(y)\,dy$ となります．(ここで $|g^{(n)}(x-y)|$ は定数で抑えられることに注意します．) よって $f*g$ は C^∞ 級となります.

[4] (1) $\displaystyle\int_0^1 e^{xf(t)}\,dt$ は常に正の値を取り，積分記号下の微分が何回でもでき，この関数の n 階微分は $\displaystyle\int_0^1 f(t)^n e^{xf(t)}\,dt$ となります．($|f(t)^n e^{xf(t)}|$ は有界であることから積分記号下の微分が使えます．) よってこの関数は C^∞ 級となり，$g(x)$ も C^∞ 級となります.

(2) (1) より，

$$g'(x) = \frac{\displaystyle\int_0^1 f(t)e^{xf(t)}\,dt}{\displaystyle\int_0^1 e^{xf(t)}\,dt}$$

となります．続けて微分して，

$$g''(x) = \frac{\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 e^{xf(t)}\, dt \int_0^1 e^{xf(t)}\, dt - \left(\int_0^1 f(t)e^{xf(t)}\, dt\right)^2}{\left(\displaystyle\int_0^1 e^{xf(t)}\, dt\right)^2}$$

となります．分子だけ見ればよく，示すべき式は

$$\int_0^1 f(t)^2 e^{xf(t)}\, dt \int_0^1 f(t)e^{xf(t)}\, dt \geq \left(\int_0^1 f(t)e^{xf(t)}\, dt\right)^2$$

となりますが，$f(t)$ が実数値なので，これは Cauchy-Schwarz 不等式です．