2016 年解析学特別演習 I テスト (5) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点 [1] 15 点 ×2, [2] 20 点，[3] 20 点，[4] 30 点です．平均点は 65 点，最高点は 100 点 (4 人) でした．

[1] (1) f は可積分なので $f(x) < \infty$ a.e. です．したがって，∞ に発散する任意の単調増大数列 $\{a_n\}$ に対し，$f(x)\chi_{X_{a_n}^c}(x)$ は $n \to \infty$ の時単調増大で $f(x)$ にほとんどいたるところ収束します．よって単調収束定理によって，$\displaystyle\int_{X_{a_n}^c} f\,d\mu$ は $\displaystyle\int_X f\,d\mu$ に収束します．これは有限値なので，$\displaystyle\int_{X_{a_n}} f\,d\mu$ は 0 に収束することになり，結論がわかります．

(2) (1) より，$\displaystyle\int_{X_c} f\,d\mu < \varepsilon/2$ となる $c > 0$ を取ります．$\mu(E) < \varepsilon/(2c)$ のとき，

$$\int_E f\,d\mu \le \int_{X_c} f\,d\mu + \int_{X_c^c \cap E} f\,d\mu < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となります．

[2] たとえば $\chi_{(-\infty,0)}(x)$, $\chi_{[0,\infty)}(x)$ を交互に並べたものを $\{f_k\}_k$ とすれば，(1) は成り立ち，また各点 x で $\displaystyle\liminf_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} f_k(x) = 1$ なので，(2) も成り立ち，また (3) の右辺は 0 です．(3) の左辺は ∞ なので，(3) の不等式も成り立っています．

[3] 一番簡単なのはたとえば，$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = f_3(x) = \cdots = 0$ とすればできます．

もう少し複雑なものだとたとえば $f_k(x) = \dfrac{2^k}{k}\chi_{(0,1/2^k)}(x)$ とおけば，(1), (2), (3) は明らかに満たしています．区間 $(1/2^{k+1}, 1/2^k)$ 上では $\sup_k f_k(x) = f_k(x)$ であって，$\displaystyle\int_{1/2^{k+1}}^{1/2^k} f_k(x)\,dx = \frac{1}{2k}$ であることより，(4) も成立します．

[4] f が可積分であれば Lebesgue の収束定理が使えて結論が出ます．そうでないときは Fatou の補題より，

$$\liminf_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu \ge \int_X f\,d\mu = \infty$$

となるので，問題の式は $\infty = \infty$ で成立しています．