

2016 年解析学特別演習 I テスト (1)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください。

このテストは、ノート持ち込み可で行います。電子機器の使用は不可です。

途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

[1] 講義で行った、関数からの \mathbb{R}^n 上の有限加法族 \mathcal{F} と有限加法的測度 m の構成において、 $n = 2$, $f_1(x) = f_2(x) = [x]$ とする。ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。このとき \mathcal{F}, m から講義のようにして作った \mathbb{R}^2 上の外測度 Γ はどのようなものか。具体的に記述せよ。

[2] \mathbb{R}^2 上の Lebesgue 外測度 μ^* について考える。

(1) $\mu^*(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ を求めよ。

(2) $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \text{ のいずれかは無理数}\}$ とおく。 $\mu^*(A)$ を求めよ。

[3] $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ とおき、 \mathbb{N} の有限集合全体、および補集合が有限集合であるような集合全体をあわせたものを \mathcal{F} とおく。

(1) \mathcal{F} は有限加法族であることを示せ。

(2) $A \in \mathcal{F}$ に対し、

$$m(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \frac{1}{n(n+1)}, & A \text{ が有限集合の時} \\ \infty, & A \text{ が無限集合の時} \end{cases}$$

とおく。この m が \mathcal{F} 上有限加法的測度であることを示せ。

(3) m は \mathcal{F} 上完全加法的であるか。

(4) 上の \mathcal{F}, m から外測度 Γ を構成する。この Γ がどのようなものか、具体的に記述せよ。

(5) 上の外測度 Γ について、 Γ -可測な集合を決定せよ。