2015 年解析学特別演習 I テスト (5)

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.
このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください.

[1] $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ のすべての部分集合の集合を $\mathcal{B}$ とおく．$A \subset \mathbb{N}$ に対し，A の元の個数を $\mu(A)$ とおく．(A が無限集合の時は $\mu(A) = \infty$ とする．) これによって $(\mathbb{N}, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間となる．また，$\mathbb{N}$ 上の複素数値可測関数 f は複素数列 $\{f_k\}_{k=1,2,3,\dots}$ と同一視される．この時次の問いに答えよ.
(1) f が可積分であるための必要十分条件は $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ が絶対収束することであることを示せ.
(2) f が可積分の時，$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ であることを示せ.

[2] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$E \in \mathcal{B}$ とする．f を E 上 $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ に値を持つ可測関数とする．$\int_E f\, d\mu = 0$ であれば E 上 $f(x) = 0$ a.e. であることを示せ.

[3] $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ は $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可積分であるか．理由をつけて答えよ.

[4] $[0, 1]$ 上の Lebesgue 可測関数 f_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で，$[0, 1]$ 上常に $0 \le f_n(x) < \infty$ となるものが与えられたとする．正の実数 a_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ をうまく選べば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ が $[0, 1]$ 上ほとんどいたるところ収束するようにできることを示せ.