2015 年解析学特別演習 I テスト (4) 解答解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は 1 問 25 点です．平均点は 68.0 点，最高点は 100 点 (15 人) でした．解答は略解です．実際の答案ではもっと詳しく書く必要があります．

[1] (1) 単関数を $f(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{E_k}(x)$ と書いておくと $E(f > a)$ は E_k の有限個の和である．よって f は可測関数である．

(2) 授業でやったことにより，$f_1 + f_2$ は可測であり，帰納法により $\sum_{k=1}^m f_k$ も可測である．この極限も可測なので結論を得る．

[2] 正の整数 N について $E_N = \{x \in X \mid f(x) > N\}$ とおく．これは単調減少で $\bigcap_{N=1}^\infty E_N = \varnothing$ である．$\mu(E_1) \le \mu(X) < \infty$ なので，$\lim_{N\to\infty} \mu(E_N) = \mu(\lim_{N\to\infty} E_N) = 0$ となる．よって十分大きい N に対し，$\mu(\{x \in X \mid f(x) > N\}) < \varepsilon$ である．

[3] $\mathbb{R}$ の開集合は (p, q) $(p, q \in \mathbb{Q})$ の形の集合の可算和である．よって $f^{-1}(U)$ は $f^{-1}((p, q))$ の形の集合の可算和であり，Lebesgue 可測となる．

[4] $\ge$ は明らかである．

$\mu(E) < \infty$ のときは，授業でやった定理より，任意の $\varepsilon > 0$ に対しコンパクト集合 $F \subset E$ で，$\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ となるものがある．これより $\le$ の不等号を得る．

$\mu(E) = \infty$ のときは，任意に与えられた $N > 0$ に対し，ある k が取れて，$N < \mu(E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le k\}) < \infty$ となる．このとき，コンパクト集合 $F \subset E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le k\}$ で，$\mu(F) > N$ となるものが取れるので結論を得る．