2015 年解析学 IV 追試

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

問題用紙は 2 枚あります.

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.
このテストは，ノート持ち込み可で行います．電子機器の使用は不可です.
途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙に収まるように書いてください.

[1] 次のすべての条件を満たす，$(0,\infty)$ 上の Lebesgue 可積分関数の列 $\{f_k(x)\}_k$ の例を挙げよ.
(1) $f_k(x) \geq 0$.
(2) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f_k(x)\, dx = 0$.
(3) すべての $x \in (0,\infty)$ で $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$.
(4) すべての k, x で $f_k(x) \leq g(x)$ となる $(0,\infty)$ 上の可積分関数 $g(x)$ は存在しない.

[2] $f(t)$ を $(0,1)$ 上の Lebesgue 可積分関数とする．$z \in \mathbb{C}$ の時,

$$F(z) = \int_0^1 f(t) e^{itz}\, dt$$

とおく．この右辺が可積分であり，$F(z)$ が $\mathbb{C}$ 上正則となることを示せ.

[3] 測度空間 (X, μ) 上の複素数値可積分関数 $f(x), g(x)$ を取る．X の任意の可測部分集合 E について $\displaystyle\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$ であれば，ほとんどいたるところ $f(x) = g(x)$ であることを示せ.

[4] 測度空間 (X, μ) 上の複素数値可測関数列 $\{f_k(x)\}_k$ と複素数値可測関数 $f(x)$ について，任意の正数 c に対して

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geq c\}) = 0$$

が成り立つとする．このとき，関数列 $\{f_k(x)\}_k$ の適当な部分列で，$f(x)$ に X 上ほとんどいたるところ収束するものが存在することを示せ.

[5] (X, μ), (Y, ν) をそれぞれ σ-有限な測度空間とする．$f(x), g(y)$ をそれぞれ X, Y 上の複素数値可積分関数とし，μ, ν の直積測度を σ とする．このとき $f(x)g(y)$ は $X \times Y$ 上可積分であって，

$$\int_{X\times Y} f(x)g(y)\ d\sigma = \int_X f(x)\ d\mu \int_Y g(y)\ d\nu$$

であることを示せ.

[6] $1 < p < q < \infty$ とする．

(1) $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数 f で，$f \in L^p(\mathbb{R})$, $f \notin L^q(\mathbb{R})$ となるものの例を挙げよ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数 f で，$f \notin L^p(\mathbb{R})$, $f \in L^q(\mathbb{R})$ となるものの例を挙げよ．