2015 年解析学 IV 期末テスト解説

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

期末試験は 100 点満点で，平均点は 37 点，最高点は 100 点 (2 人) でした．得点分布は以下の通りです．

−40–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
6(人)	8	8	8	7	7	3	3	1	1	2	54

この得点と成績が赤字で書いてあります．成績は 99 点以上が A+, 51 点以上が A, 40 点以上が B, 30 点以上が C です．ただし演習の成績が特に良かった人は，これより良い成績がついています．D は 20 人です．

演習の成績 (悪い 2 回分を除いた平均) は，平均点は 56 点，最高点は 100 点 (1 人) でした．得点分布は以下の通りです．

0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
2(人)	4	2	7	7	10	5	8	4	6	1	56

こちらの成績が青字で書いてあります．成績は 98 点以上が A+, 75 点以上が A, 60 点以上が B, 35 点以上が C です．ただし期末試験の成績が特に良かった人は，これより良い成績がついています．D は 11 人です．

演習の単位だけを落として，その単位が欲しい人は講義の方の追試を受けてください．

[0] 解答は略．正解でも得点はなし．不正解の場合，一つにつき −20 点．ノート持込み可でこれが書けない人は論外です．

[1] (15 点) $f(x) = x^4 e^{-x^2}$ とおくと，$f'(x) = 2x^3(2-x^2)e^{-x^2}$ なので，$f(x)$ は $x = \sqrt{2}$ で最大値 $4e^{-2}$ をとる．これは 1 より小さいので，$0 \le x^{4k}e^{-kx^2} \le f(x)$ である．また $f(x)$ は $[0,\infty)$ で可積分であることは容易に分かるので，Lebesgue の収束定理が使えて，$\lim_{k\to\infty} x^{4k}e^{-kx^2} = 0$ であることより答えは 0 である．

Lebesgue の収束定理を正しく使えていない人は即座に 0 点です．

[2] (1) (5 点) $\limsup_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty} E_m$ であり，任意の k について，$\limsup_{k\to\infty} E_k \subset \bigcup_{m=k}^{\infty} E_m$ である．$\mu(\bigcup_{m=k}^{\infty} E_m) \le \sum_{m=k}^{\infty} \mu(E_m) \to 0$ であることから，$\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k) = 0$ を得る．

(2) (10 点) $E_k = \{x \in X \mid |f_k(x)| > \varepsilon_k\}$ とおく．$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$ なので (1) より $\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k) = 0$ である．$x \notin \limsup_{k\to\infty} E_k$ であれば，ある k が存在して，$x \in \displaystyle\bigcap_{m=k}^{\infty} E_m^c$ となる．すなわち，$m \geq k$ となるすべての m について，$|f_m(x)| \leq \varepsilon_m$ である．このことは $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0$ を意味する．すなわち結論が得られた．

(2) でいきなり $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ と書いている人がかなりいましたが，これは存在するかどうかわからないのでだめです．

[3] (20 点) $A_k = \{x \mid |x| \leq k, f(x) \leq k\}$ とおく．A_k は単調増大で，和は $\mathbb{R}$ である．各 k と $m \geq k$ となる m に対し，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_k^c}(x)\ d\mu = \infty$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_k^c\cap A_m}(x)\ d\mu < \infty$, $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_k^c\cap A_m}(x)\ d\mu = \infty$ であることより，$m_k \geq k$ を $k \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_k^c\cap A_{m_k}}(x)\ d\mu$ となるように取る．$f_k(x) = f(x)\chi_{A_k^c\cap A_{m_k}}(x)$ とおけば，4 条件すべてが満たされる．

[4] (15 点) m を十分大きくとれば，$\mu(E \cap \{|x| \geq m\}) < \delta$ である．$E \cap \{|x| < m\}$ は十分小さい直方体に分割することにより，測度 δ 未満の可測集合の有限個の和で覆える．したがって，$E = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{l} E_j$, $\mu(E_j) < \delta$ という表示が可能である．このとき，すべての k について $\displaystyle\int_E |f_k(x)|\ d\mu \leq l\varepsilon$ である．よって，Fatou の補題により，

$$\int_E |f(x)|\ d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)|\ d\mu \leq l\varepsilon$$

を得るので，f は可積分である．

[5] (1) (5 点) Hölder の不等式よりただちに従う．

(2) (5 点)

$$f * g(x+h) - f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+h-y) - f(x-y))g(y)\ dy$$

に Hölder の不等式を用いて，この値の絶対値は

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(h-y) - f(-y)|^p\ dx\right)^{1/p} \|g\|_q$$

で上から抑えられる．授業でやったことから，$h \to 0$ のときこの第 1 項は 0 に収束するので連続性を得る．

(3) (5 点) $\varepsilon > 0$ に対し，$f_0, g_0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$ で，$\|f_0 - f\|_p < \varepsilon$, $\|g_0 - g\|_q < \varepsilon$ となるものを取る． Hölder の不等式より，

$$|f * g(x)| \leq |f_0 * g_0(x)| + \|g\|_q\varepsilon + \|f_0\|_p\varepsilon \leq |f_0 * g_0(x)| + \|g\|_q\varepsilon + \|f\|_p\varepsilon + \varepsilon^2$$

となる．$\lim_{|x|\to\infty} f_0 * g_0(x) = 0$ は容易に分かるので，結論を得る．

[6] (1) (10 点) $A = \{x \mid f(x) \le 0\}$ とおく．$0 \le \nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu \le 0$ より，$\nu(A) = 0$ であり，絶対連続性を用いて $\mu(A) = 0$ である．すなわち μ について，$f(x) > 0$ a.e. である．

(2) (10 点) 任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{f(x)} f(x)\, d\mu = \int_E \frac{1}{f(x)}\, d\nu$$

である．(右の等号は 7/6 の演習で示した結果による．) このことより，求める Radon-Nikodym 密度関数は $1/f(x)$ である．($f(x) = 0$ となる点の集合は μ についても ν についても測度 0 なのでそのような点は無視してよい．)