2015 年解析学 IV 期末テスト

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

問題用紙は 2 枚あります.

解答用紙の一番上に学生証番号と氏名を書いてください.
このテストは, ノート持ち込み可で行います. 電子機器の使用は不可です.
途中の計算, 説明などをきちんと書いてください. 答案用紙に収まるように書いてください.

[0] 次の各定理のステートメントを書け.
(1) 単調収束定理
(2) Fatou の補題
(3) Lebesgue の収束定理

[1] $\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty x^{4k} e^{-kx^2}\, dx$ を求めよ.

[2] 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ において考える.
(1) $E_k \in \mathcal{B}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ に対して $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$ であれば, $\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k) = 0$ であることを示せ.
(2) f_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ を X 上の複素数値可測関数で, 正の数の数列 $\{\delta_k\}_k$, $\{\varepsilon_k\}_k$ について $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ が成り立っているとする. $\mu(\{x \in X \mid |f_k(x)| > \varepsilon_k\}) < \delta_k$ であればほとんどいたるところ $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ となることを示せ.

[3] $\mathbb{R}$ 上で Lebesgue 測度を考え, $\mathbb{R}$ 上の実数値可測関数 f を取る. ほとんどいたるところ $0 \le f(x) < \infty$ であり, $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \infty$ であるとする. 次の 4 条件を 満たす X 上の可測関数列 $\{f_k\}_{k=1,2,3,\dots}$ が存在することを示せ.
(a) すべての k について, ほとんどいたるところ $0 \le f_k(x) \le f(x)$ である.
(b) ほとんどいたるところ $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ となる.
(c) $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k\, d\mu = \infty$ である.
(d) すべての k について $\int_{\mathbb{R}} f_k\, d\mu < \infty$ である.

(第二面に続く)

[4] E を $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 可測集合，Lebesgue 測度を μ とし，$\mu(E) < \infty$ とする．E 上の複素数値 Lebesgue 可測関数列 $\{f_k(x)\}_k$ を考え，以下の条件が成り立っているとする．

『任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，任意の Lebesgue 可測集合 $A \subset E$ が $\mu(A) < \delta$ を満たすならば，すべての k について $\displaystyle\int_A |f_k| \, d\mu < \varepsilon$ が成り立つ.』

ここでさらに $\displaystyle\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ がほとんどいたるところ成り立っているとすると，f は E 上可積分であることを示せ.

[5] $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ とし，$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ とする．

(1) $f * g(x)$ はすべての $x \in \mathbb{R}^n$ について定義されることを示せ.

(2) $f * g(x)$ は連続関数であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{|x| \to \infty} f * g(x) = 0$ であることを示せ.

[6] $(X, \mathcal{B})$ 上の二つの測度 μ, ν を考える．$\mu(X) < \infty$, $\nu(X) < \infty$ とし，μ は ν について絶対連続，ν は μ について絶対連続であるとする．ν の μ についての Radon-Nikodym 密度関数を f とする．

(1) μ についてほとんどいたるところ $f(x) > 0$ であることを示せ.

(2) μ の ν についての Radon-Nikodym 密度関数を求めよ.